

УДК 534.8

**В.Г. Абакумов**, д-р техн. наук,  
**К.А. Трапезон**, канд. техн. наук

### **СОСТАВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ В СИЛОВЫХ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ УСТРОЙСТВАХ**

*Аннотация.* Приведено простое алгебраическое соотношение для расчета коэффициентов усиления актуаторов, задаваемых специальной функцией без непосредственного использования функции перемещений. Получены значительные коэффициенты усиления, для достижения которых нет необходимости увеличивать потребление энергии ввиду малых значений энергий рассеяния.

*Ключевые слова:* ультразвук, преобразователь, колебания, актуатор.

**V.G.Abakumov**, ScD,  
**K.A. Trapezon**, PhD.

### **COMPONENT ELEMENTS OF ELECTROMECHANICS TRANSFORMERS ARE IN POWER ULTRASONIC DEVICES**

*Abstract.* Simple algebraic correlation over is brought for the calculation of amplification of actuators, set by the special function factors, without the direct use of function of moving. The considerable values of amplification factors are got, for achievement of which there is not a necessity to increase the consumption of energy because of small values of energy of dispersion.

*Keywords:* ultrasound, transformer, vibrations, actuator.

**В.Г Абакумов**, д-р техн. наук,  
**К.О.Трапезон**, канд. техн. наук

### **СКЛАДОВІ ЕЛЕМЕНТИ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ ПЕРЕТВОРЮВАЧІВ В СИЛОВИХ УЛЬТРАЗВУКОВИХ ПРИСТРОЯХ**

*Анотація.* Наведено просте алгебраїчне співвідношення для розрахунку коефіцієнтів підсилення актуаторів, які характеризуються спеціальною функцією без безпосереднього застосування функції переміщень. Отримані значні коефіцієнти підсилення, для досягнення яких не потрібно збільшувати споживання енергії внаслідок малих енергій розсіювання.

*Ключові слова:* ультразвук, перетворювач, коливання, актуатор.

Рабочие акустические элементы актуаторы акустических колебаний находят широкое применение в разных отраслях промышленности. Они являются, например, типичными элементами ультразвукового оборудования различного назначения (ультразвуковые станки, технологические установки для очистки деталей, их упрочнения и т.п.; стоматологические или хирургические инструменты; аппаратура для усталостных испытаний материалов и элементов конструкций и др.).

Известно применение таких элементов в качестве преобразователей продольных колебаний во вращательное движение механизма позиционирования (например, в проигрывателях пластинок). Актуальной остается задача проектирования акустических актуаторов с техническими параметрами, которые бы обеспечивали повышенную энергетическую эффективность с минимальными затратами потребляемой энергии.

Теоретической основой является метод симметрий, использующий идею групповых подходов к решению дифференциальных уравнений. Благодаря этому методу появляется возможность получения замкнутых решений соответствующих уравнений с переменными коэффициентами.

Эти уравнения являются математическими моделями указанных акустических элементов. Изменяя значения упомянутых коэффициентов можно исследовать свойства и поведение реального акустического актуатора, поскольку его основные технические параметры будут определяться переменными коэффициентами дифференциального уравнения. В качестве электромеханического актуатора энергии можно рассмотреть поведение стержня переменного поперечного сечения в режиме продольных или крутильных колебаний.

Целью этой работы является поиск профилей актуаторов, энергии которые бы обеспечивали повышенную энергетическую эф-

© Абакумов В.Г., Трапезон К.А., 2011

фактивность с минимальными затратами потребляемой энергии и характеризовались бы значительным техническим ресурсом в плане функционирования в составе электромеханических устройств и систем.

Уравнение продольных колебаний стержня переменного сечения имеет вид [4]

$$W'' + 2 \frac{D'}{D} W' + k^2 W = 0, \quad (1)$$

где  $D(x) = \sqrt{F(x)}$  – параметр, определяющий форму поперечного сечения;  $k = \frac{l\omega}{c}$  – собственное значение (волновое число);  $\omega = 2\pi f$  – круговая частота;  $f$  – частота колебаний. Штрих обозначает производную по  $x$ .

Следует отметить, что уравнение (1) справедливо при условии, что поперечные сечения при колебаниях остаются плоскими и что поперечные размеры стержня достаточно малы по сравнению с длиной (так называемый тонкий стержень), т.е. этими уравнениями не учитываются поперечные деформации.

Если в общем случае закон изменения, определяющий форму поперечного сечения, определить как

$$F(x) = x^n \quad (D(x) = x^{n/2})$$

( $n$  – целое число),

тогда, исходя из (1), можно записать

$$x^2 W'' + nx W' + k^2 x^2 W = 0. \quad (2)$$

Исходя из [3], решение уравнения (2) запишем так:

$$W(x) = x^{\frac{1-n}{2}} Z_{\frac{1-n}{2}}(kx), \quad (3)$$

где  $Z_{\frac{1-n}{2}}(x) = C_1 J_{\frac{1-n}{2}}(x) + C_2 N_{\frac{1-n}{2}}(x)$ ;

( $C_1, C_2$  – произвольные постоянные;  $J_\nu(x)$  – функция Бесселя 1-го рода  $\nu$ -го порядка;

$N_\nu(x)$  – функция Бесселя 2-го рода (функция Неймана)  $\nu$ -го порядка аргумента  $x$ ).

Дифференцирование по  $x$  выражения (3) дает

$$W'(x) = x^\mu Z_{\mu-1}(kx) \cdot k = k \cdot x^\mu \cdot [AJ_{\mu-1}(kx) + BN_{\mu-1}(kx)],$$

где  $\mu = \frac{1-n}{2}$ .

Придерживаясь граничных условий для стержня со свободными концами [4], получим

$$\frac{B}{A} = - \frac{J_{\mu-1}(k\alpha)}{N_{\mu-1}(k\alpha)} = - \frac{J_{\mu-1}(k\beta)}{N_{\mu-1}(k\beta)}. \quad (4)$$

Из соотношений (4) получается трансцендентное уравнение частот, имеющее вид

$$J_{\mu-1}(k\alpha) \cdot N_{\mu-1}(k\beta) - J_{\mu-1}(k\beta) \cdot N_{\mu-1}(k\alpha) = 0. \quad (5)$$

Можно рассмотреть решение задачи для ряда  $n$ , т.е. при некоторых видах функции  $D(x)$ , которая входит в уравнение (1) и имеет смысл диаметра стержня, поскольку чаще всего акустические актуаторы энергии изготавливаются как тела вращения.

Рассмотрим случай, когда  $n=1$ . Тогда из уравнений (3)–(5) при  $n=1$  ( $\mu=0$ ) получим выражения для  $W, W'$

$$W(x) = A \left[ J_0(kx) - \frac{J_{-1}(k\alpha)}{N_{-1}(k\alpha)} \cdot N_0(kx) \right] \quad (6)$$

$$W'(x) = A \left[ J_{-1}(kx) - \frac{J_{-1}(k\alpha)}{N_{-1}(k\alpha)} \cdot N_{-1}(kx) \right] \cdot k.$$

А также уравнение частот

$$J_1(k\alpha) \cdot N_1(k\beta) - J_1(k\beta) \cdot N_1(k\alpha) = 0. \quad (7)$$

Отношение граничных диаметров трансформатора данного профиля  $\delta = \frac{D(\beta)}{D(\alpha)}$  запишем в виде

$$\delta = \left( \frac{\beta}{\alpha} \right)^{\frac{1-2\mu}{2}} = \left( \frac{\beta}{\alpha} \right)^{1/2}. \quad (8)$$

Коэффициент усиления трансформатора вида  $D(x) = x^{1/2}$  можно вычислить по выражению

$$M = \frac{W(x=\alpha)}{W(x=\beta)} = \left( \frac{\alpha}{\beta} \right)^{\mu-1} \cdot \frac{J_{\mu-1}(k\beta)}{J_{\mu-1}(k\alpha)} = \left( \frac{\beta}{\alpha} \right) \cdot \frac{J_1(k\beta)}{J_1(k\alpha)}. \quad (9)$$

Рассмотрим функцию  $D(x) = 2 \cdot \sqrt{x} / (x^2 + C)$ , содержащую произвольную постоянную  $C$ . Эта функция получена на основе метода симметрии. Решение уравнения (2) имеет вид

$$W_3(x) = -k^2 V_1(x) W(x) - W'(x) \cdot V_1'(x); \quad (10)$$

$$W_3'(x) = -k^2 V_1(x) \cdot W'(x), \quad (11)$$

где  $V_1(x) = \frac{1}{2}(x^2 + C)$ .

Поскольку, как следует из (11), производная  $W_3'(x)$  с точностью до множителя равна производной  $W'(x)$  для актуатора с профилем  $D(x) = x^{1/2}$ , то согласно гранич-

ным условиям [1–2] частотное уравнение в виде (7) будет справедливым и для данного случая  $D(x) = 2 \cdot \sqrt{x} / (x^2 + C)$ .

Отсюда приходим к выводу, что собственные частоты стержней (актуаторов) равной длины, профиль которых отвечает данной функции  $D(x)$  при данных  $\alpha$  и  $\beta$ , во-первых, согласно (7) не зависят от величины коэффициента  $C$  и, во-вторых, полностью совпадают с частотами для концентратора профиля  $D(x) = x^{1/2}$  при тех же  $\alpha$  и  $\beta$ . Этот факт, имеющий важное принципиальное значение, облегчает проведение последующего анализа.

В частности, если рассмотреть случай, когда  $D(x = \beta) > D(x = \alpha)$ , то усиление колебаний для функции  $D(x) = 2 \cdot \sqrt{x} / (x^2 + C)$  можно исследовать согласно выражению

$$M_3 = \frac{W_3(x = \alpha)}{W_3(x = \beta)} = \frac{W(x = \alpha)}{W(x = \beta)} \cdot \frac{(\alpha^2 + C)}{(\beta^2 + C)}$$

Поскольку отношение граничных диаметров

$$\delta_3 = \frac{D(x = \beta)}{D(x = \alpha)} = \delta \cdot \frac{\alpha^2 + C}{\beta^2 + C},$$

то усиление данного трансформатора можно определить как

$$M_3 = \delta \cdot \delta_3 \cdot \frac{J_1(k\beta)}{J_1(k\alpha)} = \left( \frac{M}{\delta} \right) \cdot \delta_3.$$

Профиль акустического трансформатора энергии данной формы строится после определения коэффициента  $C$  по следующей формуле, исходя из соотношения

$$C = \frac{\delta_3 \beta^2 - \delta \alpha^2}{\delta - \delta_3} = \frac{\delta_3 \beta^2 - \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \cdot \alpha^2}{\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} - \delta_3}.$$

Изменяя значение параметра  $\alpha$ , можно выйти на случаи, когда  $D(x = \beta) < D(x = \alpha)$ , и тогда необходимо пользоваться видоизмененными соотношениями (14), (15), в виде

$$\delta_3^* = \frac{D(x = \alpha)}{D(x = \beta)} = \frac{1}{\delta} \cdot \left( \frac{\beta^2 + C}{\alpha^2 + C} \right) \quad (12)$$

$$M_3^* = \frac{W_3(x = \beta)}{W_3(x = \alpha)} = \left( \frac{\delta}{M} \right) \cdot \delta_3^* \quad (13)$$

$$C^* = \frac{\delta_3^* \cdot \delta \cdot \alpha^2 - \beta^2}{1 - \delta_3^* \cdot \delta} \quad (14)$$

Характер изменения функции  $D(x) = 2 \cdot \sqrt{x} / (x^2 + C)$  при различных  $C$  представлен на рис. 1.

Перейдем теперь к практической схеме построения акустических актуаторов, где в качестве иллюстрации этой схемы приведем некоторые варианты анализа эффективности таких устройств с позиций обеспечения значительного усиления колебаний при условии минимально необходимого потребления ими электрической энергии.

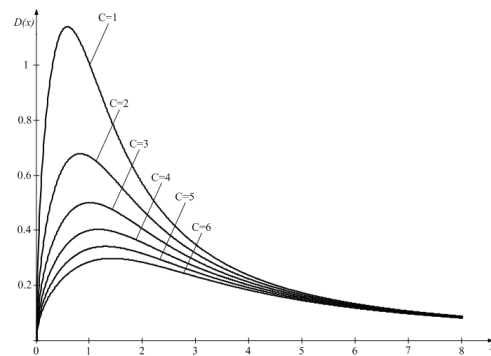


Рис.1. Профили характеристик актуаторов (верхняя часть)

Пусть  $\alpha = 0,001$ , тогда получим по модулю  $M_3^* = \delta_3^* \cdot 12,744$  (соотношение (13)).

Если отношение присоединительных размеров акустического трансформатора  $\delta_3^*$  равно 2, то его усиление будет соответственно  $M_3^* = 25,488$ . При других значениях параметра  $\delta_3^* = 1; 4; 8; \dots$  получим следующие значения усиления  $M_3^* = 12,744, 50,976, 101,952$ . Таким образом, сравнивая полученные значения, можно убедиться, что  $M_3^* \gg \delta_3^{*2}$ , а это в свою очередь значительно больше, например, чем при использовании актуатора экспоненциальной формы. Используя соотношение (14) при данных значениях параметра  $\delta_3^*$ , можно легко определить значения существенной постоянной  $C^*$ . То есть  $C^* = 0,033; 0,016; 7,98 \cdot 10^{-3}; 3,973 \cdot 10^{-3}$  соответственно. Профили акустических актуаторов энергии, соответствующие найденным  $C^*$ , показаны на рис. 2. Известно, что рассеяние энергии в акустическом актуаторе пропорционально его массе, поэтому выбранными профилями будет определяться и

их КПД. Из семейства кривых можно выбрать те, при которых КПД будет достаточно большим при одновременном достаточно существенном усилении.

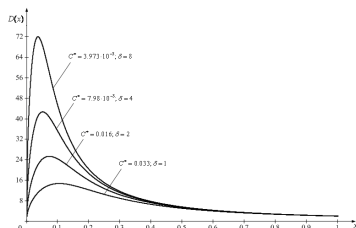


Рис.2. Профили характеристик актуаторов (верхняя часть)

Распределения амплитуд перемещений  $W(x)$  и циклических механических напряжений  $\sigma = EW'(x)$  ( $E$  – модуль упругости (модуль Юнга)) вычисляются согласно (10) и (11) на интервале  $x = \alpha \div \alpha + 1$  и показаны на рис.3 и 4.

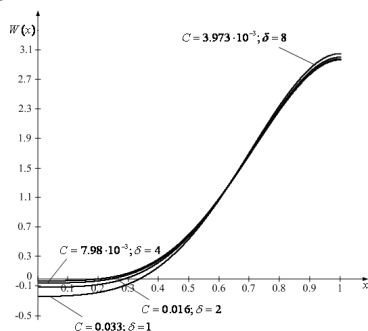


Рис.3. Распределения амплитуд перемещений актуаторов

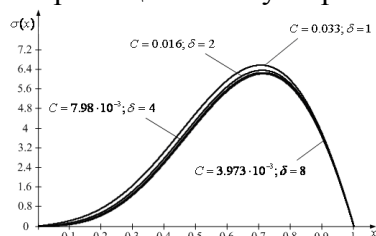


Рис.4. Распределения механических напряжений актуаторов

Согласно приведенным рисункам максимум напряжений, который расположен примерно на расстоянии 0,3 длины  $l$  от тонкого конца не совпадает с узлами – они находятся на расстоянии от 0,21 до 0,31 (в зависимости от  $\delta_3^*$ ) отсчитываемом от массивного конца акустического актуатора энергии. Это обстоятельство позволяет без опасений использовать узловое сечение рассмотренных устройств для жесткого их крепления на соответствующих неподвижных деталях электромеханических элементов

ультразвуковых устройств.

#### Список использованной литературы

1. Абакумов В. Г. Акустические трансформаторы энергии в силовых ультразвуковых устройствах / В. Г. Абакумов, К. А. Трапезон // Техніч. ел.динаміка. – 2006. – Т.2.– Тем.вип. – С. 34–37.
2. Абакумов В. Г. Некоторые новые результаты по исследованию эффективности акустических концентраторов / В. Г. Абакумов, К. А. Трапезон // Электроника и связь. – 2004. – № 24. – С.66–71.
3. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э.Камке / Пер. с нем.– М.: Наука, 1971. – 577 с.
4. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле / С.П Тимошенко // пер. с англ. Э.Камке – М.: Наука, 1985. – 420 с.  
Получено 27.10.2011

#### References

1. Abakumov V. G., Trapezon K. A. Acoustic transformers of energy are in the power ultrasonic devices // Journal of technical electro-dynamics. – 2006. – Vol. 2. – Thematic edition. – P. 34–37 [in Russian].
2. Abakumov V. G., Trapezon K. A. Some new results on research of efficiency of acoustic concentrators // Electronics and communications. – 2004. – № 24. – P. 66–71 [in Russian].
3. Dr. Kamke. Reference book on usual differential equalizations: Trudged. with him. – Moscow: Science, 1971. – 577 p. [in Russian].
4. Tymoshenko S. P. Vibrations on engineering business: Trudged. with an eng. – Moscow: Science, 1985. – 420 p. [in Russian].



Абакумов Валентин Георгиевич, д.т.н., проф. каф. звукотехн. и регистр. Информ. Нац. технич. ун-та Украины «КПИ», abakumov05@voliacable.com



Трапезон Кирилл Александрович, к.т.н., доц.каф. звукотехн. и регистр.информ. Нац.технич. ун-та Украины «КПИ», e-mail: trapezon@ukr.net