

УДК 621.311.1

**А.В. Китаев**, канд. техн. наук,  
**В.Л. Агбомассу**

## РАСПРЕДЕЛЕНИЕ И ИЗМЕНЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЯ И ТОКА В ЛЮБОМ СЕЧЕНИИ ДЛИННОЙ ЛИНИИ ПРИ ПЕРЕМЕННОЙ НАГРУЗКЕ

**Аннотация.** На основе метода эквивалентного генератора, круговых диаграмм и традиционной методики выполнен анализ поведения длинной линии в любом сечении при переменной нагрузке. Рассмотрено распределение напряжения и тока в линии без потерь и в реальной линии. Установлены возможности их работы в режимах стабилизатора напряжения и тока.

**Ключевые слова:** сечение линии, переменная нагрузка, напряжение и ток, распределение и изменение.

**A. V. Kitaev**, Ph.D.,  
**V.L. Agbomassou**

## DISTRIBUTION AND CHANGE OF VOLTAGE AND CURRENT VALUES IN ANY SECTION OF A LONG LINE AT A VARIABLE LOAD

**Abstract.** On the basis of a method of the equivalent generator, circular diagram's and a traditional technique is analyzed behavior of a long line in any section and at variable loading. Current and voltage distribution is considered in a line loss-free and in a real line. Possibilities of their work are established in the modes of voltage stabilizer and current.

**Keywords:** a line section, a variable load, voltage and current, distribution and change.

**О.В Китаев**, канд. техн. наук,  
**В.Л. Агбомассу**

## РОЗПОДІЛ І ЗМІНА НАПРУГИ Й СТРУМУ В БУДЬ-ЯКОМУ ПЕРЕТИНІ ДОВГОЇ ЛІНІЇ ПРИ ЗМІННОМУ НАВАНТАЖЕННІ

**Анотація.** На основі методу еквівалентного генератора, кругових діаграм і традиційної методики виконано аналіз поведінки довгої лінії в будь-якому перерізі при змінному навантаженні. Розглянуто розподіл напруги та струму в реальній лінії та лінії без втрат. Встановлено можливості їхньої роботи в режимах стабілізатора напруги та струму.

**Ключові слова:** переріз лінії, змінне навантаження, напруга й струм, розподіл і зміна.

В работах [1-4] приведено подробное исследование поведения напряжения и тока в любом сечении длинной линии в различных режимах ее работы. Ниже известные решения дополнены анализом поведения линии при переменной нагрузке.

В целях повышения простоты и чтобы упростить изложение и сделать его нагляднее, рассмотрим линии без потерь. Будем полагать, что для нее известны первичные параметры  $L_0, C_0$ , напряжение генератора  $U_1$ , частота  $f$  и длина  $l$ . Тогда могут быть найдены вторичные параметры: волновое сопротивление  $\rho = \sqrt{L_0 / C_0}$ , коэффициент фазы  $\beta = \omega \sqrt{L_0 C_0}$  и входное сопротивление линии на зажимах генератора для любого заданного сопротивления нагрузки  $Z_H$

$$Z_{BX1} = \frac{Z_H \cos \beta l + j\rho \sin \beta l}{\rho \cos \beta l + Z_H \sin \beta l}.$$

Это открывает возможность использования четвертой модификации решения телеграфных уравнений [1]

© Китаев А.В., Агбомассу Л.В., 2011

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 \cos \beta l + j \underline{I}_2 \rho \sin \beta l$$

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 \cos \beta l + j \frac{\underline{U}_2}{\rho} \sin \beta l$$

для определения напряжения и тока на выходе линии  $\underline{U}_2$  и  $\underline{I}_2$ , а также тока  $\underline{I}_1$  в цепи генератора

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_1}{Z_H \cos \beta l + j\rho \sin \beta l}; \underline{U}_2 = \underline{I}_2 Z_H; \underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{Z_{BX1}}.$$

Для описания поведения  $\underline{U}_2$  и  $\underline{I}_2$  линию целесообразно представить в виде T-образной схемы замещения симметричного четырехполюсника с продольными сопротивлениями индуктивного характера  $Z_1 = Z_2 = j\rho(1 - \cos \beta l) / \sin \beta l$  и поперечным сопротивлением  $Z = -j\rho / \sin \beta l$  емкостного характера (рис.1,а). От этой схемы на основании метода эквивалентного генератора (МЭГ) можно перейти к схеме замещения активного двухполюсника (рис.1,б), в состав которой входят последовательно соединенные сопротивления нагрузки  $Z_H$  и входного

сопротивления со стороны выходных зажимов линии  $Z_{BX2} = jptg\beta l$ .

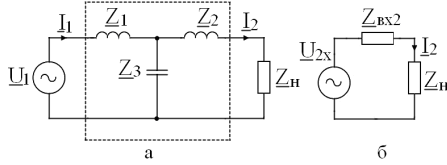


Рис.1. Схемы замещения линии

Одновременно введем относительные значения тех же показателей, т.е.  $i_2 = \frac{I_2}{I_{2K3}}$  и  $u_2 = \frac{U_2}{U_{2XX}}$ , где в качестве базовых значений избраны ток короткого замыкания  $I_{2K3}$  и напряжение холостого хода  $U_{2XX}$ , фазы которых различаются между собой на  $90^\circ$ . В итоге получим

$$i_2 = \frac{1}{1 + k_z e^{j\psi}} \quad (1)$$

$$u_2 = \frac{j}{1 + v e^{j\psi}}, \quad (2)$$

где  $k_z$  относительное значение сопротивления нагрузки, равное отношению модулей  $Z_H$  и  $Z_{BX2}$ ;  $v = 1/k_z$ ;  $\psi$  – угол, равный разнице аргументов тех же сопротивлений.

Обращение в дальнейшем к методу круговых диаграмм вызвано стремлением изложения материала в соответствии с принципами системности, преемственности и наглядности.

Очевидно, что уравнения (1) и (2) представляют собой уравнения окружностей в комплексной форме записи, единичные значения хорд которых перпендикулярны одно другому (рис.2).



Рис.2. Круговая диаграмма напряжения и тока в конце линии

Центр же окружности, например для тока, находится так:

хорда ОМ делится пополам, из точки деления восстанавливается перпендикуляр;

в конце хорды проводится еще один перпендикуляр, который является линией отсчета углов  $\psi$ , причем при острых углах ( $\psi < 90^\circ$ ) положительные углы откладываются от верхней половины перпендикуляра, отрицательные – от нижней, при тупых углах ( $\psi > 90^\circ$ ) наоборот;

луч, расположенный под углом  $\psi$  к перпендикуляру в конце хорды, пересекаясь с перпендикуляром к середине хорды, определяет центр  $O'$  окружности для искомой круговой диаграммы тока;

продолжение хорды ОМ дает прямолинейный отрезок, от которого ведется отсчет углов  $\psi$  для проведения линии переменного сопротивления в относительных значениях (линия  $k_z$ ), причем формулировка правила отсчета углов противоположна используемой выше при поиске центра;

для определения центра окружности напряжения достаточно на перпендикуляре к середине хорды отложить отрезок  $O'p = \hat{I}'' q$ ;

соединением начала координат с избранным на шкале значением  $k_z$  устанавливается положение и величина вектора  $i_2$  (отрезок  $Om$ );

соответствующее полученному  $i_2$  относительное напряжение  $u_2$  легко найти, если от вектора  $i_2$  под углом  $\phi_H$  провести опережающий его луч  $On$ .

С целью сокращения объема материала далее ограничимся исследованием поведения в любом сечении линии лишь относительно тока  $i_2$ . Примем для конкретности, что аргумент сопротивления нагрузки  $\phi_H = 37^\circ$  (установлен на основании усредненного значения  $\cos \phi_H$  нагрузки промышленных предприятий равно 0,8), тогда  $\psi = -53^\circ$ . Полученные в итоге круговая диаграмма (рис.2) даст исчерпывающую информацию о поведении тока в первом сечении линии, которое приходится на начало отсчета координаты  $u$ .

Для этого достаточно на линии переменного сопротивления зафиксировать, например, значения  $k_z = 0; 0,5; 1,0; 2,0; 5,0; 10$  и т.д., а затем соединить их с началом координат комплексной плоскости. Тогда отрезки,

лежащие в пределах проведенной на рис.2 торы занесены в табл. 1. окружности, дадут искомые значения  $i_2$ , ко-

1. Результаты расчетов  $i_2$  при  $l = 0,6 \lambda$

$K_Z$	Значения $y$						
	0	$\lambda/12$	$\lambda/6$	$\lambda/4$	$\lambda/3$	$5\lambda/12$	$\lambda/2$
0	1	0,87	0,5	0	-0,5	-0,87	-1
0,5	$0,73e^{j17^\circ}$	$0,725e^{j9^\circ}$	$0,54e^{j2^\circ}$	$0,26854e^{j36^\circ}$	$0,294e^{j124^\circ}$	$0,57e^{-j152^\circ}$	$0,735^{-j162^\circ}$
1,0	$0,56e^{j27^\circ}$	$0,628e^{j11^\circ}$	$0,57e^{j3,2^\circ}$	$0,408e^{j27^\circ}$	$0,29 e^{-j77^\circ}$	$0,4e^{-j129^\circ}$	$0,56^{-j154^\circ}$
2,0	$0,37e^{j36^\circ}$	$0,525e^{j12^\circ}$	$0,59e^{j2,8^\circ}$	$0,536e^{j17^\circ}$	$0,383e^{j40^\circ}$	$0,265e^{-j90,2^\circ}$	$0,367^{-j144^\circ}$
5,0	$0,18e^{j45^\circ}$	$0,432e^{j8^\circ}$	$0,62e^{-j2^\circ}$	$0,645e^{-j8,1^\circ}$	$0,51e^{-j16^\circ}$	$0,261e^{-j36^\circ}$	$0,18^{-j135^\circ}$
10	$0,094e^{j49^\circ}$	$0,398e^{j5^\circ}$	$0,624e^{j0,9^\circ}$	$0,681e^{-j4,2^\circ}$	$0,57e^{-j81^\circ}$	$0,30 e^{-j17^\circ}$	$0,094^{-j131^\circ}$

Далее рассмотрим поведение тока в других сечениях линии, избрав дискретность изменения координаты  $y$ , равной  $\lambda/12$ , где  $\lambda$  – длина волны, которая определяется делением  $2\pi$  на  $\beta$ . Расчетное соотношение для  $i_2$  может быть представлено следующим уравнением:

$$i_2 = \frac{\cos \beta y}{1 + k_z e^{j\psi}} \cdot (1 + k_z \operatorname{tg} \beta l \cdot \operatorname{tg} \beta y \cdot e^{j(\varphi_n + 90^\circ)}). \quad (3)$$

Результаты расчетов по уравнению (3) с учетом того, что длина линии  $l$  равняется  $0,6\lambda$  сведены в табл.1, а их графическая иллюстрация приведена на рис.3.

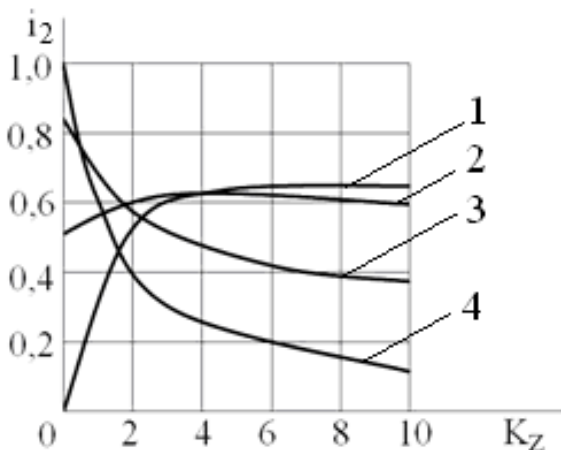


Рис.3. Семейство зависимостей  $i_2 = f(K_Z)$  для линии без потерь: 1 –  $y = \lambda/4$ ; 2 –  $y = \lambda/12$ ; 3 –  $y = \lambda/6$ ; 4 –  $y = 0$

Следует подчеркнуть, что, во-первых, в любом сечении линии годографом тока при изменении сопротивления нагрузки является дуга окружности. Это следует из анализа уравнения (3). Действительно, здесь множи-

тель, стоящий перед выражением в скобках, есть уравнение окружности, а в скобках заключено обычное комплексное число  $Me^{j\theta}$ , умножение на которое меняет величину хорды исходной окружности в  $M$  раз и вызывает ее поворот на угол  $\theta$ .

Во-вторых, имеет смысл указать, что в пределах первой четверти длины волны по мере роста координаты  $y$  степень воздействия сопротивления нагрузки на изменение тока снижается.

Рассмотрим некоторые частные случаи исполнения и поведения линии:

Длина линии равна  $\lambda/4$ . Тогда  $\cos \beta l = 0$ ,  $\sin \beta l = 1$  и входное сопротивление в схеме замещения линии  $Z_{BX2}$  (см. рис.1б) становится равным бесконечности ( $\hat{A} = j\rho$ ,  $A = 0$ ). И потому, казалось бы, решение задачи по определению распределения и изменения интересующих нас показателей становится проблематичным. Однако, обращаясь к первой модификации решения телеграфных уравнений, найдем

$$\begin{aligned} U_2 &= -jI_1\rho; \\ I_2 &= -j\frac{U_1}{\rho} = const, \end{aligned}$$

т.е. в оговоренных условиях линия обладает свойствами стабилизатора тока (значения напряжения источника и волнового сопротивления не меняются). Следовательно, она способна держать выходной ток неизменным независимо от величины сопротивления нагрузки. Поэтому при  $y = 0$  график изменения тока  $I_2$  в функции сопротивления нагрузки –

линия, параллельная оси абсцисс, а график напряжения – прямая линия, выходящая из начала координат.

Однако в последующих сечениях это с практической точки зрения явно полезное свойство исчезает. В этом можно убедиться, избрав в качестве расчетного следующее уравнение:

$$i_{01} = \cos \beta y + k_{\rho} e^{j(\varphi_H + 90^\circ)} \sin \beta y,$$

где  $i_{01} = \frac{I}{I_2}$  – относительное значение тока;

$k_{\rho} = Z_H / \rho$  – относительное сопротивление со значениями, которые выше брались для  $k_z$ , т.е. 0; 0,5; 1,0; 2,0; 5,0; 10 и т.д.

Результаты расчетов при ранее избранном значении угла  $\varphi_H = 37^\circ$  приведены в табл. 2. Важно подчеркнуть, что в сечении, которое приходится на начало линии ( $x=0$  или  $y = 0,25\lambda$ ), в соответствии с исходными условиями при изменении модуля сопротивления нагрузки неизменно напряжение, а ток растет по линейному закону.

## 2. Результаты расчетов при $\varphi_H = 37^\circ$

$Z_H/\rho$	Значения $y$			
	0	$\lambda/12$	$\lambda/6$	$\lambda/4$
0	1	0,87	0,5	0
0,5	1	$0,74e^{j16^\circ}$	$0,42e^{j55^\circ}$	$0,5e^{j127^\circ}$
1,0	1	$0,73e^{j55^\circ}$	$0,69e^{j92^\circ}$	$1e^{j127^\circ}$
2,0	1	$1e^{j82^\circ}$	$1,49e^{j111^\circ}$	$2e^{j127^\circ}$
5,0	1	$2,3e^{j110^\circ}$	$4,05e^{j121^\circ}$	$5e^{j127^\circ}$
10	1	$4,5e^{j118^\circ}$	$8,37e^{j124^\circ}$	$10e^{j127^\circ}$

Длина линии равна  $0,5\lambda$ . В таком случае  $\sin \beta l = 0$ ,  $\cos \beta l = -1$ ,  $\underline{tg} \gamma l = 0$ , поэтому и входное сопротивление равно нулю. Ток и напряжение выхода окажутся равными:

$$\underline{U}_2 = -\underline{U}_1; \underline{I}_2 = -\underline{I}_1.$$

Поскольку напряжение источника неизменно, то, следовательно, при оговоренных условиях линия обеспечивает стабилизацию выходного напряжения. Ток же выхода по

мере изменения сопротивления нагрузки будет меняться по закону:  $\underline{I}_2 = \underline{U}_2 / \underline{Z}_H$ . В последующих сечениях линии свойство стабилизации напряжения вновь проявится в сечении при координате  $y = l$ , а для сечения  $y = 0,25\lambda$  будет характерна стабильность тока и линейная зависимость напряжения.

Описанную методику исследования линии без потерь распространим и на описание поведения реальной линии. Тогда в число исходных данных придется ввести первичные параметры  $R_0$ ,  $G_0$  и рассчитать по известным соотношениям [1] значения коэффициента затухания  $\alpha$ , коэффициента фазы  $\beta$ , коэффициента распространения  $\gamma$  и другие требуемые показатели. Однако известен и другой прием, согласно которому все вторичные и первичные параметры определяются на основании измерения входных сопротивлений в режимах холостого хода и короткого замыкания. Важно подчеркнуть, что результаты расчета значений  $\gamma$  тем и другим методами не совпадают, причем причиной расхождений является коэффициент фазы  $\beta$ , который подлежит корректировке на величину  $2\pi k$ , где  $k$  может принимать значения 1; 2 и т.д. Но, к сожалению, четкого критерия подбора  $k$  в литературе не приводится.

По мнению авторов, проблему решает предложение по определению зоны реальных значений  $\gamma$ . Такая зона приведена на рис.4.

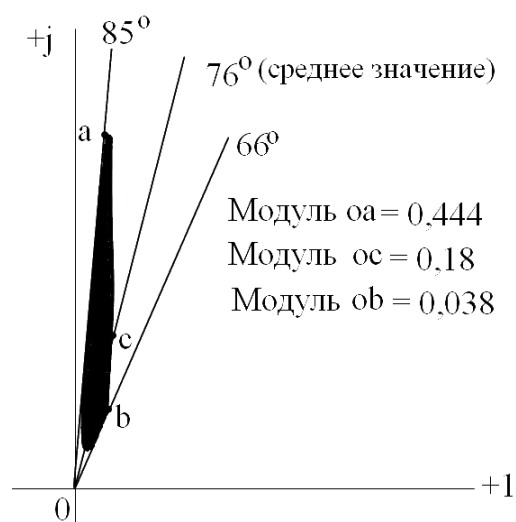


Рис.4. Зона реальных значений  $\gamma$

Она построена на основании результатов расчета  $\gamma$  для ста вариантов линий, приведенных в [2]. В итоге установлено, что в качестве искомого критерия может выступить аргумент  $\gamma$ , который не должен быть менее  $66^\circ$ .

Далее возвратимся к основному вопросу исследования и перепишем уравнение (3) в виде

$$i_2 = \frac{ch\underline{\gamma}y}{1 + k_z e^{j\underline{\nu}}} \cdot (1 + k_z th\underline{\gamma}l \cdot th\underline{\gamma}y \cdot e^{j(\varphi_H + \varphi_{BK})}). \quad (4)$$

Последнее имеет сходство и различие с (3). Поэтому графическая иллюстрация круговых диаграмм для сечения линии при  $y = 0$ , приведенная на рис.2, сохранится, однако с той разницей, что единичные хорды ON и OM потеряют свою взаимную перпендикулярность. Результаты расчетов относительных значений токов для ранее избранных сечений линии приведены в табл.3, а их графическое изображение дано на рис.5.

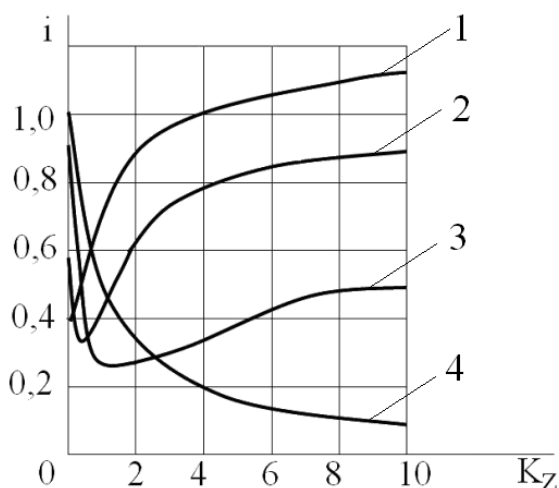


Рис.5. Семейство зависимостей  $i = f(K_z)$  для реальной линии: 1 –  $y = \lambda/4$ ; 2 –  $y = \lambda/4$ ; 3 –  $y = \lambda/4$ ; 4 –  $y = 0$

### 3. Результаты расчетов относительных значений токов

$K_z$	Значения $y$						
	0	$\lambda/12$	$\lambda/6$	$\lambda/4$	$\lambda/3$	$5\lambda/12$	$\lambda/2$
0	1	$0,876e^{j14^\circ}$	$0,562e^{j23^\circ}$	$0,395e^{j90^\circ}$	$0,728e^{j141^\circ}$	$1,1909e^{j162^\circ}$	$1,316e^{j180^\circ}$
0,5	$0,699e^{j12^\circ}$	$0,557e^{j12^\circ}$	$0,379e^{j42^\circ}$	$0,473e^{j101^\circ}$	$0,736e^{j133^\circ}$	$0,958e^{j154^\circ}$	$1,056e^{j176^\circ}$
1,0	$0,527e^{j19^\circ}$	$0,394e^{j8^\circ}$	$0,353e^{j61^\circ}$	$0,529e^{j104^\circ}$	$0,728e^{j129^\circ}$	$0,864e^{j151^\circ}$	$0,912e^{j176^\circ}$
2,0	$0,349e^{j25^\circ}$	$0,266e^{j27^\circ}$	$0,395e^{j79^\circ}$	$0,590e^{j105^\circ}$	$0,713e^{j125^\circ}$	$0,765e^{j149^\circ}$	$0,771e^{j178^\circ}$
5,0	$0,172e^{j31^\circ}$	$0,243e^{j65^\circ}$	$0,484e^{j90^\circ}$	$0,649e^{j104^\circ}$	$0,691e^{j121^\circ}$	$0,659e^{j147^\circ}$	$0,648e^{j177^\circ}$

Исследование реальной линии с укорочением до четверти и половины длины волны показало, что свойства идеальной стабилизации либо тока, либо напряжения здесь теряются. Но тем не менее, в оговоренных условиях линия обеспечит экстремальное значение входного сопротивления  $Z_{BX2}$  или соответственно  $th\underline{\gamma}l$  (максимум 2,72, минимум 0,65). Поэтому, если принять, что значение волнового сопротивления  $Z_B = 1000$  Ом, то режим стабилизации выходного тока линии ( $l = 0,25\lambda$ ) с погрешностью 5 % можно обеспечить в диапазоне нагрузок от нуля до 150 Ом, что в ряде случаев может рассматриваться как решение проблемы. В линии с длиной  $l = 0,5\lambda$  можно получить стабилизированное выходное напряжение при той же погрешности в диапазоне изменения сопротивления нагрузки от 1300 Ом до бесконечности.

### Выводы

1. Обращение к теории многополюсников расширяет возможности исследования поведения линии на основе использования метода эквивалентного генератора и круговых диаграмм.

2. При изменении модуля сопротивления нагрузки годографами тока и напряжения во всех сечениях линии являются окружностями.

3. Линии при длине равной четверти или половине длины волны переводятся в режим работы идеальной стабилизации либо тока, либо напряжения (линия без потерь). Для реальной линии режимы стабилизации тех же показателей могут быть выполнены лишь в пределах допустимой погрешности в ограниченном диапазоне нагрузок.

10	$0,092e^{j34^\circ}$	$0,277e^{j79^\circ}$	$0,531e^{j93^\circ}$	$0,674e^{j104^\circ}$	$0,679e^{j120^\circ}$	$0,613e^{j147^\circ}$	$0,603e^{j173^\circ}$
----	----------------------	----------------------	----------------------	-----------------------	-----------------------	-----------------------	-----------------------

#### Список использованной литературы

1. Теория линейных электрических цепей / Б. П. Афанасьев, О. Е. Гольдин, И. Г. Кляцкин, Г. Я. Пинес. – М.: Высш. шк. – 1973. – 592 с.
2. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники / Л. А. Бессонов. // Метод. указ. и контр. задания. – М.: – Высш. шк. – 1987. – 158 с.
3. Основы теории цепей / Г. В. Зевеке, П. А. Ионкин, А. В. Нетушил, С. В. Страхов. – М.: Энергия. – 1975. – 751 с.
4. Ионкин П. А. Теоретические основы электротехники / П. А. Ионкин. – М.: – Высш.шк. – 1976. – 545 с.

Получено 04.04.2011

#### References

1. Afanasyev B. P., Goldin A. E., Klyatskin J. G., Pines G. J. The theory of linear electric circuits. – Moscow: Vyssh. shk. – 1973. – 592 p. [in Russian].
2. Bessonov L. A. Theoretical foundations of electrical engineering. The method. the

decreed. and counter. problem-of. – Moscow: Vyssh. shk., 1987. – 158 p. [in Russian].

3. Zeveke G. V., Ionkin P. A., Netushil A. V., Strakhov S. Fundamentals of circuit theory / Energia, –1975. – 751 p. [in Russian].

4. Ionkin P. A. Theoretical foundations of electron trotehniki. – Moscow: Vyssh. shk. – 1976. – 545 p. [in Russian].



Китаев

Александр Васильевич,  
канд.техн.наук,  
проф. каф. энергетики и  
электротехн. Херсонского  
нац. техн. ун-та.  
Бериславское шоссе 24  
г. Херсон, Украина, 73008,  
e-mail:laurvignon@yahoo.fr



Агбомассу Винньон Лоран,  
магистр техн. наук,  
инж. каф. энергетики и электротехн. Херсонского нац. техн. ун-та.  
Бериславское шоссе 24  
г. Херсон, Украина, 73008  
тел.+38(0552)516-468,  
e-mail: laurvignon@yahoo.fr