

УДК 681.513.3

Е.Г. Скляренко, канд. техн. наук,  
В. Шумахер, доктор-инженер

## СИНТЕЗ ЗАКОНОВ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СЛЕДОВАНИЯ АВТОПОЕЗДА ПО ЗАДАННОЙ МАРШРУТНОЙ КРИВОЙ

*Аннотация.* Рассмотрен синтез следящей системы управления для реализации движения автопоезда по заданной маршрутной кривой. Синтез нелинейного закона управления основан на линеаризации обратной связи по состоянию кинематической модели движения прицепа, имеющего виртуальную систему рулевого управления.

Е. Г. Скляренко, канд. техн. наук,  
В. Шумахер, д-р-инженер

## СИНТЕЗ ЗАКОНІВ УПРАВЛІННЯ ДЛЯ ВИРІШЕННЯ ЗАВДАННЯ ПРЯМУВАННЯ АВТОПОЇЗДА ЗА ЗАДАНОЮ МАРШРУТНОЮ КРИВОЇ

*Анотація.* Розглянуто синтез слідкуючої системи управління для реалізації руху автопоїзда за заданою маршрутною кривою. Синтез нелінійного закону управління засновано на лінеаризації зворотним зв'язком за станом кінематичної моделі руху причепа, що має віртуальну систему керування кермом.

V. Shumacher, ScD,  
E. G. Skljarenko, PhD

## SYNTHESIS OF CONTROL LAWS FOR SOLVING THE PROBLEM OF REPETITION TRAIN ON A GIVEN ROUTE CURVE

*Abstract.* This paper presents the design of a path following controller for a truck and trailer system. The designed nonlinear control law is based on input-state linearization of the kinematic model of the single trailer, featuring a virtual steering mechanism.

### Введение

Автономные системы грузоперевозок являются в настоящее время объектом многочисленных исследовательских проектов, среди которых можно выделить работы по автоматизации автопоездов. Сложность автоматического вождения автопоездов обусловлена нелинейностью объекта управления, а также неустойчивостью при движении задним ходом.

### Анализ публикаций

В ранних публикациях по данной тематике рассматривались исключительно автопоезда со сцепными устройствами точно над задней осью тягача и полуприцепов (англ. on-axle hitching) [4]. Позже были найдены законы управления для автопоездов со смещением сцепных устройств относительно задних осей (англ. off-axle hitching) [3]. Однако эти законы управления справедливы лишь для одного из направлений движения автопоезда при одном из направлений смещения сцепных устройств. В работе авторов [1] был впервые представлен универсальный нелинейный закон управления для автопоездов с двухосным прицепом, не требующий модификации при изменении направления движения и для любого смещения сцепного устройства относительно задней оси тягача. Следует также отметить, что для управления транспортными средствами находят применение два типа следящих систем автоматического управления: системы слежения за заданной траекторией движения

(англ. trajectory tracking) [4] и системы управления для следования по заданной маршрутной кривой (англ. path following) [2]. Основное отличие между этими двумя проблемами управления – в определении ошибки слежения. В первом случае траектория задает желаемое изменение переменных состояний в функции времени и, таким образом, ошибку слежения в каждый момент времени. Во втором случае задается желаемая маршрутная кривая в рабочем пространстве, не являющаяся функцией времени и, таким образом, здесь уже важна не столько динамика движения по кривой, сколько отклонение от кривой (ошибка слежения) и динамика ошибки.

### Постановка задачи исследования

Публикация посвящена синтезу следящей системы автоматического управления автопоездом, воздействующей на систему рулевого управления тягача, для реализации автономного движения по заданной маршрутной кривой. Задача состоит в нахождении такого закона управления, при котором ошибка отклонения от кривой (или прямой) со временем стремится к нулю, а переменные состояния ограничены.

### Материалы исследования

Особенностью предлагаемой следящей системы автоматического управления автопоездом, обеспечивающей следование по заданной маршрутной кривой, состоит в использовании предложенной в [1] системы стабилизации в качестве внутреннего контура регулирования.

Стабилизирующий контур (при заданной скорости и

направлении движения) получает от внешнего следящего контура задание на угол между дышлом и продольной осью прицепа в зависимости от кривизны маршрутной кривой и воздействует на систему рулевого управления тягача, исключая потерю управления автопоездом при движении задним ходом. При таком подходе синтез закона управления следящей системы значительно упрощается, т.к. в задаче следования по заданной маршрутной кривой вместо движения автопоезда может рассматриваться движение одного прицепа, имеющего виртуальную систему рулевого управления с управляющим воздействием угол „дышло-прицеп“. Динамика стабилизирующего контура при синтезе следящей системы может учитываться или нет.

Движение прицепа при малых скоростях довольно точно описывает одноколейная кинематическая модель, не учитывающая скольжения между колесами и дорожным полотном, а также угловые перемещения в вертикальных плоскостях. Аналогично с работами [2,3] в модели использованы переменные состояния не в абсолютной декартовой, а в полярной системе координат относительно маршрутной кривой. Сама маршрутная кривая может задаваться в виде комбинации прямых и дуг окружности.

На рис. 1 показано движение прицепа относительно окружности с радиусом  $R$  и центром в начале координат. Вектор состояния  $\mathbf{x} = [S \ \Theta_S]^T$  при этом образуют дистанция  $S$  от изображающей точки на задней оси прицепа до окружности, а также угол  $\Theta_S$  между целевым направлением (касательная к окружности) и продольной осью прицепа:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = V_2 \sin \Theta_S \cos \phi_{HH} \\ \frac{d\Theta_S}{dt} = V_2 \frac{1}{l_{HH}} \sin \phi_{HH} + V_2 \frac{1}{R+S} \cos \Theta_S \cos \phi_{HH}, \end{cases} \quad (1)$$

где  $S = \sqrt{x_{HH}^2 + y_{HH}^2} - R$ ,  $\Theta_S = \pm(\gamma - \Theta_{HH}) + \frac{\pi}{2}$  и  $\gamma = \text{atan2}(y_{HH}, x_{HH})$ . Функция  $\text{atan2}$  – это так называемый четырехквadrантный арктангенс с двумя аргументами. Знак „+“ соответствует движению против часовой стрелки. Движению по часовой стрелке соответствует знак „-“.

В такой трактовке задача следования по заданной маршрутной кривой сводится к задаче стабилизации, при движении с положительной скоростью (вперед) – положения равновесия  $\mathbf{x}_d = [0 \ 0]^T$ , при движении с отрицательной скоростью (задний ход) – положения равновесия  $\mathbf{x}_d = [0 \ \pi]^T$ . При задании маршрутной кривой с  $R = \infty$  уравнения (1) описывают случай следования по прямой.

Синтез закона управления может быть выполнен после линеаризации объекта обратной связью по состоянию. Линеаризацией обратной связью (ЛОС) по состоянию принято называть переход от системы нелинейных дифференциальных уравнений с аффинным входом

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot u, \quad \mathbf{x} \in R^n, \quad u \in R, \quad (2)$$

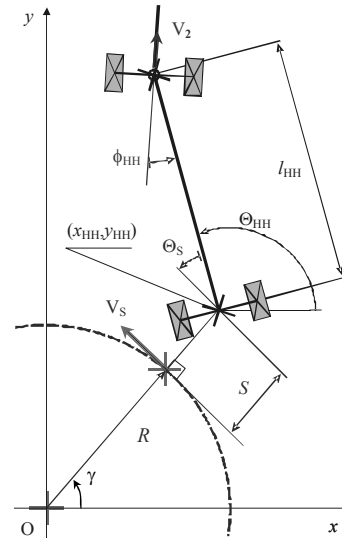


Рис. 1. Движение прицепа с виртуальной системой рулевого управления

где  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  и  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  – гладкие векторные функции в окрестности положения равновесия, к эквивалентной канонической форме управления Бруновского (Brunovsky controller form) [5]:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = z_3, \quad \dots \quad \dot{z}_{n-1} = z_n \\ \dot{z}_n = \alpha(\mathbf{z}) + \beta(\mathbf{z}) \cdot u \end{cases} \quad (3)$$

с помощью преобразования обратной связью, состоящего из:

- диффеоморфного преобразования состояния  $\mathbf{Z}(\mathbf{x}) = (z_1(\mathbf{x}) \dots z_n(\mathbf{x}))^T$  (взаимно однозначное, непрерывно дифференцируемое отображение) и
- преобразования управления  $u = \frac{1}{\beta(\mathbf{z})}(v - \alpha(\mathbf{z}))$ ,

где  $v = \dot{z}_n$  – новый вход линеаризованной системы.

Объект при этом охватывается обратной связью по переменным состояния. Отсюда и название преобразования. Принципиальное отличие от ЛОС по выходу – отсутствие уравнений внутренней динамики, так как при ЛОС по состоянию линеаризуются все фазовые координаты.

Если не учитывать динамику стабилизирующего контура, модель (1) можно привести к виду (2) без увеличения порядка системы  $n = 2$ . Для этого в (1) необходимо заменить скорость передней оси прицепа  $V_2$  на скорость вдоль маршрутной кривой  $V_S$ , используя взаимосвязь

$$V_S(t) = V_2(t) \frac{R}{R+S} \cos \Theta_S(t) \cos \phi_{HH}(t), \quad (4)$$

и сформировать аффинный вход заменой  $\tan \phi_{HH} = u$ . Динамика стабилизирующего контура может быть учтена путем введения в систему (1) линейного дифференциального уравнения  $\dot{\phi}_{HH} = F(\phi_{HH}, u)$ , формирующего одновременно аффинный вход.

Для удобства анализа и синтеза системы регулирования обозначим

$$\text{переменные состояния: } x_1 = S, \quad x_2 = \Theta_S;$$

управляющее воздействие при движении с постоянной скоростью ( $V_s \neq 0$ ):  $u$ ;

функции:  $c_i = \cos x_i$ ,  $s_i = \sin x_i$ ,  $\{i = 1 \dots 2\}$ ;

кривизну маршрутной кривой:  $\rho = \frac{1}{R}$ ;

длину прицепа:  $l_{HH}$ .

Теперь можно получить следующие функции модели движения прицепа (2) без учета динамики внутреннего стабилизирующего контура:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} V_s(\rho x_1 + 1) \tan x_2 \\ V_s \rho \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{V_s}{l_{HH} c_2}(\rho x_1 + 1) \end{bmatrix}.$$

Легко проверяется, что матрица управляемости для системы (2), (5)  $Q_s = [\text{ad}_f^0 \mathbf{g} \quad \text{ad}_f^1 \mathbf{g}]$  имеет полный ранг в окрестности начала координат, т.е. объект управляем. Условие инвариантности для системы 2-го порядка выполняется всегда. Это означает, что система (2), (5) линеаризуема и диффеоморфное преобразование состояния  $\mathbf{z}(\mathbf{x})$  существует [5]. Для справки, векторная функция  $\text{ad}_f \mathbf{g} = L_f \mathbf{g} - L_g \mathbf{f}$  – это скобки Ли векторных функций  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  и  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ , а скалярная функция  $L_f \mathbf{g} = \frac{d\mathbf{g}}{d\mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}$  – это производная Ли функции  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  по функции  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ . Скобки Ли и производная Ли высших порядков определяются рекурсивно, причем  $L_f^0 \mathbf{g} = \mathbf{g}$  и  $\text{ad}_f^0 \mathbf{g} = \mathbf{g}$ .

Первый элемент вектора преобразования состояния  $z_1(\mathbf{x})$  находится решением системы  $n-1$  однородных дифференциальных уравнений в частных производных

$$\frac{dz_1}{dx} \cdot \text{ad}_f^i \mathbf{g} = 0, \quad i = 0 \dots n-2 \quad (6)$$

с дополнительным условием  $\frac{dz_1}{dx} \cdot \text{ad}_f^{n-1} \mathbf{g} \neq 0$  [5]. Остальные элементы вектора преобразования состояния, как и преобразование управления, являются функциями  $z_1$  [5]:

$$z_i = L_f^{i-1} z_1 = L_f z_{i-1}, \quad i = 2 \dots n, \quad (7)$$

$$\alpha(\mathbf{x}) = L_f^n z_1 = L_f z_n, \quad \beta(\mathbf{x}) = L_g L_f^{n-1} z_1 = L_g z_n \quad (8)$$

Применение этой процедуры к системе (2), (5) позволяет найти выражения для элементов вектора преобразования состояния:

$$z_1(\mathbf{x}) = x_1, \quad (9)$$

$$z_2(\mathbf{x}) = V_s(\rho x_1 + 1) \tan x_2,$$

а также выражения для функций  $\alpha(\mathbf{x})$  и  $\beta(\mathbf{x})$ :

$$\alpha(\mathbf{x}) = V_s^2 \rho(\rho x_1 + 1)(2 \tan^2 x_2 + 1), \quad (10)$$

$$\beta(\mathbf{x}) = \frac{V_s^2(\rho x_1 + 1)^2}{l_{HH} c_2^3}. \quad (11)$$

Следует учитывать, что преобразование состояния (9) справедливо в той окрестности начала координат, где оно является диффеоморфизмом, т.е. якобиан  $\frac{d\mathbf{z}(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}}$  не обращается в нуль [5]. При движении вперед – это окрестность  $\Theta_s \in [-\pi/2, \pi/2]$ , а при движении задним ходом –  $\Theta_s \in [\pi/2, 3\pi/2]$ .

Искомый нелинейный закон управления, аналогичный полученному в [1]

$$u = \frac{1}{\beta(\mathbf{z})}(v - \alpha(\mathbf{z})) = \frac{1}{\beta(\mathbf{z})}(\dot{z}_2 - \alpha(\mathbf{z})) = \frac{1}{\beta(\mathbf{z})}(\ddot{z}_{1d} + \mathbf{b}^T(\mathbf{z}_d - \mathbf{z}) - \alpha(\mathbf{z})), \quad (12)$$

$$\phi_{HH} = \arctan(u), \quad (13)$$

$$\mathbf{b} = [b_0 \quad b_1]^T, \quad (14)$$

можно представить в виде двух контуров, охватывающих объект (рис. 2):

- 1) контура, линеаризирующего фазовые координаты, со входом  $v$  ( $\dot{z}_2 = v$  см. систему (3)) и нелинейными звеньями ( $\beta^{-1}(\mathbf{z})$  – в прямом канале,  $\alpha(\mathbf{z})$  – в канале обратной связи);
- 2) контура с линейным регулятором состояния  $\mathbf{b}$  по координатам  $z_i$  с заданием  $\ddot{z}_{1d}$  и  $\mathbf{z}_d = [z_{1d}(x_d) \quad z_{2d}(x_d)]^T$ .

При выборе устойчивого характеристического полинома  $N(s) = s^2 + b_1 s + b_0$  закон управления (9) - (14) обеспечивает локальную устойчивость замкнутой системы, асимптотическую сходимость к нулю ошибки слежения  $\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \mathbf{z}_d(t) - \mathbf{z}(t)$  и ограниченность всех переменных состояния [5]. При этом переходные процессы выходной координаты объекта будут описываться линейной передаточной функцией

$$G(s) = \frac{z_1(s)}{z_{1d}(s)} = \frac{1}{N(s)} \quad [5].$$

Коэффициенты  $b_0$  и  $b_1$  полинома  $N(s)$  в законе

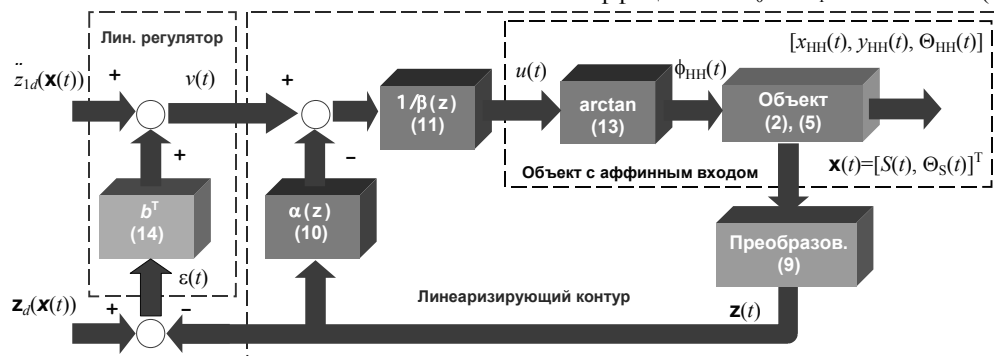


Рис.2. Следящая система автоматического управления автопоездом на основе ЛЮС по состоянию

(12) нужно выбирать, исходя из желаемого быстродействия замкнутой системы и динамики внутреннего стабилизирующего контура.

### Результаты моделирования

Компьютерное моделирование синтезированной следящей системы регулирования производилось для демонстрационной модели автопоезда с двухосным прицепом в масштабе 1:16 [1].

Постоянная времени внутреннего стабилизирующего контура – 2,7 с. В качестве полинома  $N(s)$  в (12) использован бином Ньютона второго порядка с характеристической частотой  $\omega_0 = (8,75с)^{-1}$ ,  $b_1 = 2\omega_0$ ,  $b_0 = \omega_0^2$ . На рис.3,а представлен след тягача (C0 и C1) и прицепа (C2 и C3), движущихся задним ходом по часовой стрелке со скоростью 0,1 м/с (масштаб 1:16), а на рис.3,б – переходные процессы в системе. Заданная маршрутная кривая – окружность с радиусом 1 м и центром в начале координат. Начальное положение прицепа:  $x_{HH}(0)=1м$ ,  $y_{HH}(0)=1м$ ,  $\Theta_{HH}(0)=150^\circ$  (см. след C3). Вектор задания  $z_d(x_d)$  вычисляется согласно (9) при  $x_d = [0 \ \pi]^T$ ,  $\ddot{z}_d$  принято нулевым. Видно, что ошибка слежения, как и предписывает теория, экспоненциально сходится к нулю.

### Выводы

Хотя в предложенной следящей системе управления автопоездом не учитывалась динамика внутреннего стабилизирующего контура, при малых скоростях это не сказывается на эффективности решения задачи следования по заданной маршрутной кривой.

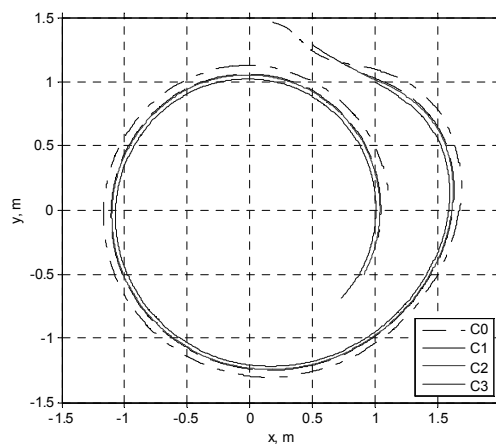
Нелинейные законы управления, синтезированные на основе ЛОС по состоянию, являются универсальными и исключают потерю управляемости движущегося задним ходом автопоезда при любом смещении сцепного устройства относительно задней оси тягача. Устойчивость системы гарантируется, если угол между целевым направлением и продольной осью прицепа не превышает предельно допустимое значение (легко соблюсти путем ограничения). При реализации автономного движения все же желательно иметь систему планирования маршрута движения, изначально исключающую недопустимые состояния.

### Список использованной литературы

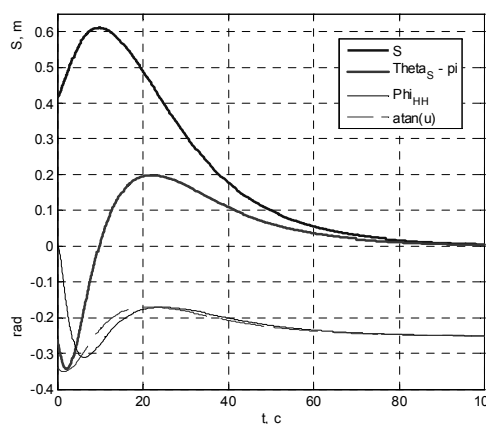
1. Скляренко Е.Г. Стабилизация заднего хода автопоезда с двухосным прицепом методом линеаризации обратной связью по состоянию / Е.Г. Скляренко, В.Шумахер // *Вісн. Нац. техн. ун-ту «ХПІ»*. – Харків: – 2010. – № 28. – С. 275-278.
2. Altafini C. Path Following With Reduced Off-Tracking for Multibody Wheeled Vehicles / C.Altafini // *IEEE transactions on control systems technology*. – Vol.11. – No. 4. – 2003. – С. 598-605.
3. Path-Tracking for Articulated Vehicles with Off-Axle Hitching / P.Bolzern, R.M.DeSantis, A.Locatelli, D.Masciocchi // *IEEE transactions on control systems technology*. Vol. 6. – No. 4. – 1998. – С. 515-523.
4. Design of trajectory stabilizing feedback for driftless flat systems / M.Fliess, J.Levine, P.Martin. P.Rouchon // *Proc. 3rd European Control Conf.* – Rome, Italy. – 1995. – С. 1882-1887.

5. Slotine J.-J., Li W. *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall / J.-J.Slotine, Li W – 1991. – 461с.

Получено 16.07.2011



а



б

Рис.3. Движение по окружности задним ходом: а – след тягача и прицепа; б – переходные процессы



Скляренко  
 Евгений Геннадиевич,  
 к.т.н., науч. сотр. ин-та систем  
 автоматич. управления Брауншвейгского технич. ун-та  
 Technische Univ. Braunschweig  
 Institut für Regelungstechnik,  
 Hans-Sommer-Str. 66  
 38106 Braunschweig  
 skliarenko@ifr.ing.tu-bs.de  
 Вальтер Шумахер,  
 доктор-инженер, директор  
 ин-та систем автомат.  
 управления Брауншвейгского  
 технич. ун-та  
 Technische Univ. Braunschweig  
 Institut für Regelungstechnik,  
 Hans-Sommer-Str. 66  
 38106 Braunschweig  
 Tel.: +49 (531) 391-3837  
 w.schumacher@tu-bs.de