УДК 621.31:62-53

Б. Л. Копчак, канд. техн. наук

АПРОКСИМАЦІЯ ПЕРЕХІДНИХ ФУНКЦІЙ ПОЛІНОМАМИ ДРОБОВОГО ПОРЯДКУ

Анотація: *Розглянуто апроксимацію стандартних передавальних функцій та довільних ланок електромеханічних систем, для яких відомий перехідний процес, поліномами дробового порядку з застосуванням удосконаленого методу рою частинок. Досліджено вплив його параметрів на точність співпадіння перехідних та частотних характеристик.*

Ключові слова: *апроксимація, перехідні функції, поліноми дробового порядку, метод рою частинок*

B. L. Kopchak, Ph.D.

APPROXIMATION OF TRANSITION FUNCTIONS BY FRACTIONAL ORDER POLYNOMIALS

Abstract. *We consider approximation of the standard transfer functions of binomial form and Butterworth form, as well as random parts of electromechanical systems, for which transition process is known, by fractional order polynomials, using an improved method of particles swarm optimization. It is concluded that the influence of parameters on the accuracy of the proposed method matches the transient and frequency characteristics.*

Keywords: *approximation of transition functions, fractional order polynomials, method of particles swarm optimization*

Б. Л. Копчак, канд. техн. наук

АППРОКСИМАЦИЯ ПЕРЕХОДНЫХ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Аннотация: *Рассмотрена аппроксимация стандартных передаточных функций и произвольных звеньев электромеханических систем полиномами дробного порядка с применением усовершенствованного метода роя частиц, а также исследовано влияние его параметров на точность совпадения переходных и частотных характеристик.*

Ключевые слова: *аппроксимация, переходные функции, полиномы дробного порядка, метод роя частиц*

В даний час в наукових виданнях можна відзначити підвищений інтерес до дробового числення взагалі, а також до застосування похідних та інтегралів дробових порядків в різних областях науки и техніки і, зокрема, в теорії керування [1, 2, 3] для аналізу та синтезу систем керування динамічними системами. Ці роботи дозволяють зробити ряд акцентів, що стосуються тенденцій розвитку цього напряму, а також позначити проблеми, які могли б стимулювати подальші дослідження і розробки в області використання апарату дробового числення. Зокрема використання апарату дробового числення в системах керування електроприводами з ПІД-регуляторами, які реалізують дробові закони керування, дозволяють покращити показники якості динамічних характеристик електроприводів та підвищити запас їх стійкості у порівняння з аналогічними системами, побудованими за класичними законами керування [1, 2, 3, 4, 5]. Взагалі дробові системи (чи системи нецілого порядку) можуть розглядатися як узагальнення систем цілого порядку. В деяких працях авторами запропоновані алгоритми апроксимації передавальних функцій (ПФ) цілого порядку дробовими ПФ з аналізом точності співпадіння як в частотних [6, 7], так і в часових [2] областях.

На основі аналізу, проведеному в [1], відзначено, що до відкритих і невирішених завдань, пов'язаних з дробовим численням і його застосуваннями в математичному і комп'ютерному моделюванні слід, зокрема, віднести: розвиток методів структурної і параметричної ідентифікації динамічних систем, математичні моделі яких містять інтегродиференційні оператори нецілих порядків. Необхідність ідентифікації об'єкта керування або інших ланок системи, що зводиться, як правило, до визначення їх ПФ, виникає при аналізі і синтезі систем автоматичного керування електромеханічними системами. В [8] описана методика апроксимації ПФ ланок електромеханічних систем (ЕМС) за їх експериментальними динамічними характеристиками методом z-перетворення.

Заміна ланок ЕМС з цілочисельними передавальними функціями високого порядку дробовими поліномами першого–другого порядку має значну перевагу з точки зору спрощення моделі, точності та часу апроксимації [9, 10] при побудові мікропроцесорних самоналагоджувальних (адаптивних) систем керування з дробовими регуляторами.

Метою даної роботи є:

– апроксимувати стандартні ПФ біноміальної форми та форми Баттерворта поліномами дробового порядку, застосувавши удосконалений метод рою частинок і дослідити вплив його параметрів на точність співпадіння перехідних та частотних характеристик;

– розробити алгоритм знаходження ПФ дробового порядку довільних ланок ЕМС, для яких відомий перехідний процес, отриманий в результаті експерименту.

Одним з підходів до вирішення цієї задачі є метод рою частинок [4], удосконалений автором для розв'язування задач апроксимації в ЕМС. Якщо застосувати цей метод для N частинок, які рухаються у D-мірному просторі пошуку, то кожна частинка характеризується випадковими положенням і швидкістю. Кожна частинка змінює свою траєкторію на кожній ітерації на основі власного і групового досвіду. I-та частинка позначається

$$X_i = (x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{iD}).$$

Її найкращий попередній розв'язок (стан, положення), який позначають pbest, зафіксований у вигляді

$$P_i = (p_{i1}, p_{i2}, ..., p_{iD}).$$

Поточна швидкість (швидкість зміни положення) описується

$$V_i = (v_{i1}, v_{i2}, ..., v_{iD}).$$

Найкраще досягнутий розв'язок цілого рою на даний момент (gbest) записується у вигляді

$$P_g = (p_{g1}, p_{g2}, ..., p_{gD}).$$

На кожному часовому кроці кожна частинка рухається в бік положення pbest і gbest.

В [4] запропоновано оцінювати продуктивність (ефективність) руху частинок, які формують групи в залежності від кількості апроксимуючих параметрів (D) до бажаного розв'язку фітнес-функцією, яка встановлює зв'язок між положенням і швидкістю i-тої частинки для D- вимірного масиву наступними рівняннями:

$$\begin{aligned} v_{id}(t+1) = \omega \cdot v_{id}(t) + c_1 \cdot \phi_1 \cdot (p_{id}(t) - \\ - x_{id}(t)) + c_2 \cdot \phi_2 \cdot (p_{gd}(t) - x_{id}(t)) \end{aligned}, \quad (1)$$

$$x_{id}(t+1) = x_{id}(t) + v_{id}(t+1), \quad (2)$$

де c_1 і c_2 – дві додатні константи, які називаються локальний і глобальний ваговий коефіцієнт, відповідно; φ_1 і φ_2 – дві випадкові функції в діапазоні [0,1]; ω – вагова доля інерції (inertia weight) частинок рою (константа).

Запропоноване удосконалення методу рою частинок полягає в тому, що у відомий алгоритм (1,2) внесені наступні зміни:

– початковий розподіл рою здійснюється шляхом ділення діапазону пошуку кожного невідомого параметра на кількість елементів рою в одному ряді і рівномірного розподілу елементів рою в просторі пошуку розв'язку в заданих межах;

– рекомендується встановлювати межі пошуку кожного невідомого параметра, виходячи з очікуваних значень шуканих параметрів (не встановлювати не обґрунтовано широкі межі пошуку невідомих параметрів дробової ланки, як прийнято в [4]) і збільшувати тільки у випадку відсутності задовільного результату;

– рекомендується проводити уточнений розрахунок знайдених параметрів лише у випадку, коли отримана похибка перевищує допустиму, шляхом зменшення меж пошуку в зоні попередньо отриманих результатів;

– з метою прискорення процедури апроксимації запропоновано оцінювати похибку апроксимації на кожній ітерації і, припиняти її за умови досягнення бажаної точності;

– вибір констант c_1 і c_2 запропоновано здійснювати користувачами, оскільки вони визначають поведінку й ефективність методу в цілому.

Для оцінки точності апроксимації різними ланками дробового порядку запропоновано наступні параметри перехідних та частотних характеристик:

σ – абсолютне середньоквадратичне відхилення перехідної функції ($\sigma_п$), або ЛАЧХ ($\sigma_ч$), знайдене за виразом [4]

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i - y_{ie})^2}\,, \qquad (3)$$

де y_i – значення апроксимуючої перехідної функції або ЛАЧХ в i-й точці; y_{ie} – значення перехідної функції апроксимованої ланки або ЛАЧХ в i-й точці; N – кількість точок опрацювання перехідного процесу; δ – відносна похибка апроксимації перехідної функції ($\delta_п$), або ЛАЧХ ($\delta_ч$) знайдена за виразом

$$\delta = \frac{\sigma}{y_y}\,100\,\%\,, \qquad (4)$$

де y_y – усталене значення перехідної функції або L (0,01) ЛАЧХ апроксимуючої ланки.

I. Результати апроксимації стандартних форм поліномами дробового порядку

Нами запропоновано апроксимувати стандартні ПФ біноміальної форми та форми Батерворта першого-четвертого порядку дробовими поліномами з ПФ

$$W(s) = \frac{k}{a_1 s^{\alpha_1} + 1}, \qquad (5)$$

$$W(s) = \frac{k}{a_2 s^{\alpha_2} + a_1 s^{\alpha_1} + 1}. \qquad (6)$$

Апроксимацію здійснено за використання методу рою частинок, на основі вперше розробленого оригінального алгоритму для трьох (5) або п'яти (6) параметрів (k, a_2, α_2, a_1, α_1) в середовищі MATLAB з метою апроксимації передавальних функцій цілого порядку поліномами дробового порядку виду (5), (6). Результати апроксимації: апроксимуючі ПФ дробового порядку, відрізок часу перехідної функції $t_п$, на протязі якого проведена процедура апроксимації та похибки апроксимації наведені в таблиці 1. Як приклад, наводимо результати пошуку найкращих варіантів апроксимації для двох стандартних ланок з цієї таблиці.

а) Апроксимація ПФ біноміальної форми і форми Баттерворта першого порядку. Ці форми співпадають і описуються наступною ПФ:

$$W(s) = \frac{1}{s+1}. \qquad (7)$$

Оскільки вихідний перехідний процес не має перегулювання, то за основу для апроксимації вибрано найбільш поширену ланку дробового порядку (1).

На рис.1 крива «1» показана перехідна функція, яка відповідає ПФ біноміальної і Баттерворта першого порядку (7), знайдена за зворотнім перетворенням Лапласа.

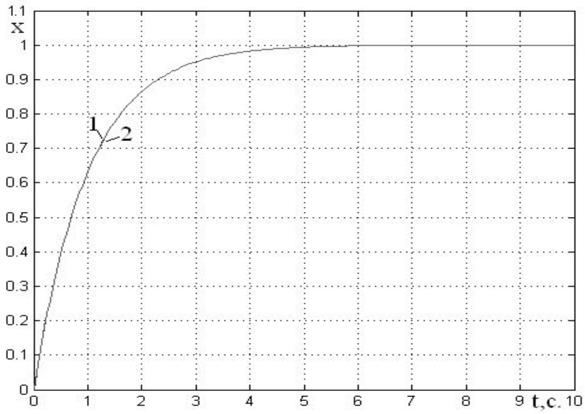

Рис. 1. Перехідні функції, які відповідають ПФ біноміальної форми і форми Баттерворта першого порядку, розраховані за ПФ (7) – крива «1» і за (8) – крива «2»

Застосувавши запропоноване програмне забезпечення, отримано апроксимуючу ПФ дробового порядку у вигляді:

$$W(s) = \frac{1{,}0009}{1{,}0012 s^{1.0006} + 1}. \qquad (8)$$

Перехідний процес, розрахований за ПФ (8), показаний на рис. 1. крива «2».

Якщо вираз (8) заокруглити, то отримаємо початкову форму (7), тобто отриманий вираз повністю збігся з заданим, що підтверджує коректність запропонованої апроксимації.

На рис. 2 крива «1» показано ЛАЧХ, які відповідають ПФ біноміальної і Баттерворта першого порядку за виразом (7), а на рис. 2. крива «2» –за виразом (8).

1. Таблиця результатів апроксимації перехідних функцій стандартних ланок цілого порядку дробовими поліномами

№	Тип ланки цілого порядку	ПФ стандартної ланки $W_{ст.i}(s)$	ПФ дробових поліномів $W_{Дi}(s)$	$t_п$, с.	Похибки апроксимації $\sigma_п$	$\delta_п$, %
1	Біноміальна і Баттерворта першого порядку	$\frac{1}{s+1}$	$\frac{1{,}0009}{1{,}0012s^{1.0006}+1}$	10	0,000126	0,01
2	Баттерворта другого порядку	$\frac{1}{s^2+1{,}4s+1}$	$\frac{2{,}2611}{4{,}116s^{1.61}+2{,}3648s^{0.2328}+1}$	10	0,008	0,8
			$\frac{1{,}0132}{1{,}1811s^{1.8749}+1{,}2169s^{0.923}+1}$	15	0,0034	0,34
3	Баттерворта третього порядку	$\frac{1}{s^3+2s^2+2s+1}$	$\frac{1{,}8348}{5{,}7402s^{2.0917}+3{,}3703s^{0.5408}+1}$	10	0,0173	1,73
			$\frac{0{,}9996}{2{,}3493s^{2.3709}+2{,}3242s^{1.0553}+1}$	15	0,0096	0,96
4	Баттерворта четвертого порядку	$\frac{1}{s^4+2.6s^3+3.4s^2+2.6s+1}$	$\frac{1{,}2470}{6{,}2199s^{2.7015}+4{,}5748s^{1.0111}+1}$	10	0,0181	1,81
			$\frac{0{,}9442}{3{,}9775s^{2.795}+3{,}7739s^{1.2334}+1}$	15	0,0163	1,63
			$\frac{0{,}9634}{4{,}0598s^{2.7474}+3{,}7241s^{1.2016}+1}$	20	0,0189	1,89
5	Біноміальна другого порядку	$\frac{1}{s^2+2s+1}$	$\frac{0{,}9181}{2{,}3707s^{1.2378}+1}$	10	0,0186	1,86
			$\frac{1{,}5757}{3{,}7148s^{1.4113}+1{,}2956s^{0.2502}+1}$	15	0,0095	0,95
6	Біноміальна третього порядку	$\frac{1}{s^3+3s^2+3s+1}$	$\frac{0{,}7833}{4{,}1397s^{1.4824}+1}$	10	0,0265	2,65
			$\frac{0{,}9994}{3{,}2901s^{2.2648}+3{,}379s^{1.0429}+1}$	15	0,0042	0,42
7	Біноміальна четвертого порядку	$\frac{1}{s^4+4s^3+6s^2+4s+1}$	$\frac{0{,}6112}{6{,}2882s^{1.7730}+1}$	10	0,0268	2,68
			$\frac{0{,}8026}{6{,}7482s^{1.4868}+1}$	15	0,0415	4,15
			$\frac{0{,}8788}{4{,}22s^{2.2376}+4{,}6907s^{1.2255}+1}$	15	0,0277	2,77
			$\frac{0{,}9774}{7{,}21s^{2.4401}+5{,}0592s^{1.1071}+1}$	20	0,0086	0,86

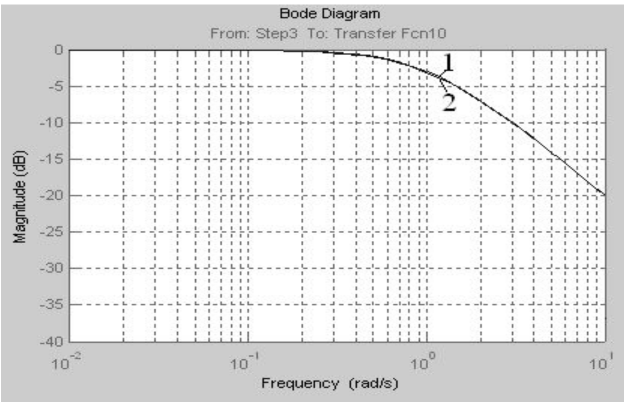

Рис. 2. ЛАЧХ, які відповідають ПФ біноміальної і Баттерворта першого порядку крива «1» відповідає ПФ за виразом (7), а крива «2» – за виразом (8)

Для даного варіанту апроксимації похибки становлять $\sigma_n = 0{,}0002$, δ_n =0,01 %. $\delta_ч$ =0,23 %.

б) Апроксимація ПФ форми Баттерворта четвертого порядку.

Така форма описуються ПФ

$$W(s) = \frac{1}{s^4 + 2{,}6s^3 + 3{,}4s^2 + 2{,}6s + 1}, \quad (9)$$

а результати найкращого варіанту її апроксимації наведені в табл. 1 (№ 4, п. 3).

На рис. 3. крива «1» показана перехідна функція, яка відповідає ПФ Баттерворта четвертого порядку (9), що знайдена за зворотним перетворенням Лапласа. Оскільки перехідний процес рис. 3 крива «1» має перегулювання, то за основу для апроксимації вибрано найбільш поширену ланку дробового порядку (6). Процес апроксимації проведений на відрізку часу 10 – 20 с.

Застосувавши запропонований алгоритм на основі методу рою частинок, отримано апроксимуючу ПФ дробового порядку у вигляді

$$W(s) = \frac{0{,}9634}{4{,}0598s^{2.7474} + 3{,}7241s^{1.2016} + 1}, \quad (10)$$

перехідна функція якої показана на рис. 3 (крива «2»). Похибки апроксимації для цього варіанта найменші (табл.1, позиція 4).

На рис. 4 показані ЛАЧХ, які відповідають ПФ форми Баттерворта четвертого порядку: «1» – за ПФ (9), а «2» – за ПФ (10).

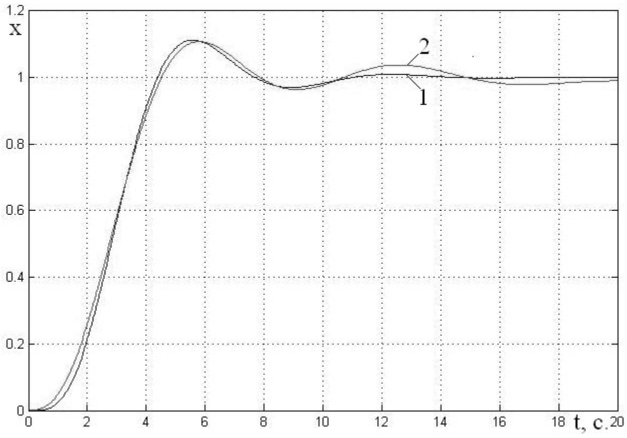

Рис. 3. Перехідні функції, які відповідають ПФ форми Баттерворта четвертого порядку, розраховані за ПФ (9) – крива «1» і за (10) – крива «2»

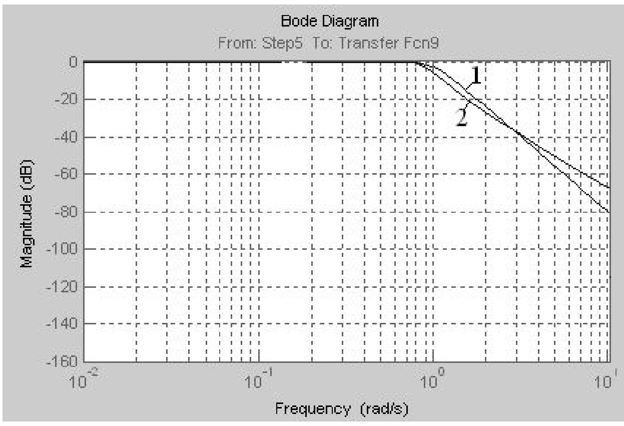

Рис. 4. ЛАЧХ, які відповідають ПФ форми Баттерворта четвертого порядку крива «1» відповідає ПФ за виразом (9), а крива «2» – за виразом (10)

Для даного варіанту апроксимації похибки становлять $\sigma_n = 0{,}0189$, δ_n =1,89 %. $\delta_ч$ =4,67 %.

ІІ. Знаходження ПФ дробового порядку об'єкта керування на основі його динамічної характеристики

Знаходження ПФ дробового порядку об'єкта керування на основі його динамічної характеристики за використання методу рою частинок показано на прикладі апроксимації перехідного процесу контура швидкості (рис. 5, крива 1), отриманого у результаті експериментального дослідження ЕМС [8].

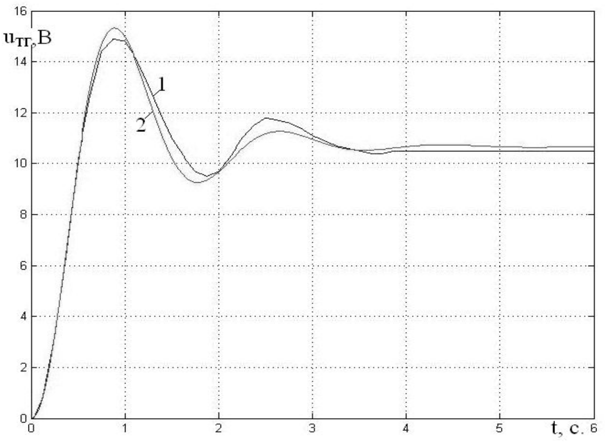

Рис.5. Перехідні процеси, отримані у результаті експериментального дослідження електромеханічної системи (крива 1) і наближеної за ПФ вар.5, табл. 2 (крива 2)

У [8] показано можливість апроксимації цього перехідного процесу методом z-перетворення. Це дозволить порівняти точність запропонованого підходу до апроксимації перехідних функцій передавальними функціями дробового порядку на основі методу рою частинок порівняно з відомими методами, зокрема за використання методу z-перетво-рення, який застосовують при дослідженні динамічних властивостей ланок ЕМС.

Оскільки вихідний перехідний процес має коливний характер, то за основу для апроксимації вибрано найбільш поширену ланку дробового порядку (6).

Проведемо дослідження впливу на точність апроксимації методом рою частинок наступних його параметрів:

а) параметрів методу рою частинок : ω – вагова доля інерції (inertia weight) частинок рою (константа), c_1 і c_2 – дві додатні константи, які, відповідно, називаються локальним і глобальним ваговим коефіцієнтами ($c_1 = c_2$) або «коректувальними факторами»;

б) тривалості відрізку часу перехідного процесу, на протязі якого відбувається застосування методу рою частинок – t_n;

в) кількості точок апроксимації – N (N вибираємо з розрахунку мінімум 100 точок на 1 с перехідної функції).

Застосувавши розроблене програмне середовище, отримано апроксимуючі ПФ дробового порядку для різних варіантів налаштувань параметрів методу рою частинок, а також проведено оцінювання точності апроксимації шляхом порівняння перехідних функцій. Результати досліджень зведені в табл. 2.

На рис. 5 (крива «2») показано перехідну функцію, яка відповідає варіанту налаштування 5 (табл. 2), а також перехідний процес, отриманий в результаті експериментального дослідження крива «1».

2. Таблиця результатів досліджень впливу параметрів методу апроксимації на її точність

	Апроксимуюча ПФ	Параметри методу рою частинок				Похибки апроксимації	
		ω	c_1, c_2	t_n,c.	N	σ_n	δ_n,%
1	$W(s) = \dfrac{15{,}7058}{0{,}195s^{1.7415} + 0{,}5629s^{0.184} + 1}$	0,8	1,0	3,5	701	0,4248	4,05
2	$W(s) = \dfrac{12{,}2158}{0{,}1418s^{1.7755} + 0{,}2254s^{0.4164} + 1}$	0,9	1,1	3,5	701	0,3762	3,58
3	$W(s) = \dfrac{11{,}5675}{0{,}1149s^{1.8657} + 0{,}1893s^{0.6557} + 1}$	1,0	1,2	3,5	701	0,3124	2,98
4	$W(s) = \dfrac{10{,}9379}{0{,}1042s^{1.8595} + 0{,}1360s^{0.8262} + 1}$	1,0	1,2	5,0	501	0,3545	3,37
5	$W(s) = \dfrac{10{,}6117}{0{,}0301s^{2.3580} + 0{,}1817s^{1.2987} + 1}$	1,0	2,0	6,0	601	0,3135	2,96

Висновки

1. З аналізу наведених у табл. 1 результатів випливає, що при апроксимації перехідних функцій біноміальної форми і форми Баттерворта вище першого порядку перевагу треба надавати дробовій ланці виду (6), яка забезпечує високу точність співпадіння за перехідними функціями і достатню – за частотними характеристиками.

2. Варіація параметрів методу рою частинок, особливо кількості точок апроксимації N, призводить до суттєвого зростання машинного часу для здійснення апроксимації, але не суттєво впливає на зниження похибки з 4,05 % до $\delta = 3{,}37$ %, тому параметр N рекомендується вибирати з розрахунку: мінімум 100 точок на 1 с перехідної функції.

3. Збільшення тривалості вихідного перехідного процесу призводить до зниження похибки апроксимації. Таким чином для отримання задовільної похибки апроксимації необхідно враховувати тривалість перехідного процесу, а тривалість усталеного відрізку перехідного процесу повинна бути не меншою, ніж половина від його загального часу.

4. На основі аналізу усіх перехідних процесів спостерігається розходження між заданим і отриманими для різних варіантів апроксимуючих ланок на відрізку усталеного значення. Це розходження можна пояснити тим, що середньоквадратичне відхилення на цій ділянці є невелике і метод рою практично нехтує ним, віддаючи перевагу іншим ділянкам, хоча ця невелика похибка суттєво впливає на кінцевий результат.

5. Запропонований метод апроксимації може бути використаний, зокрема, для побудови самоналаштувальних систем керування електроприводами виробничих механізмів на базі сучасних дробових контролерів.

Список використаної літератури

1. Васильев В. В. Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем /В. В. Васильев, Л. А. Симак, − К. : НАН Украины, 2008. − 256 с.

2. Бушер В. В. Динамические свойства систем управления с дробным порядком астатизма // Електротехнічні та комп'ютерні системи. – К. : Техніка. – 2010. – № 01(77). – С. 13 − 16.

3. Марущак Я. Ю. Дослідження системи автоматичного керування напруги автономного асинхронного генератора з регуляторами дробового порядку / Я. Ю. Марущак, Б. Л. Копчак, Л. С. Копчак, В. Б. Цяпа // Електромеханічні та енергозберігаючі системи. Тематич. вип. «Проблеми автоматизованого електропривода. Теорія і практика» науково-виробничого журналу – Кременчук : КрНУ, 2012. – Вип. 3/2012 (19).– С. 405 – 407.

4. Maiti D., Biswas S., and Konar A. Design of a Fractional Order PID Controller Using Particle Swarm Optimization Technique, (2008), *Proceeding 2nd – National Conference on Recent Trends in Information Systems (ReTIS-08),* 5 p.

5. Petras I., and Vinagre B.M. Practical Application of Digital Fractional-order Controller to Temperature Control [Text], (2002), *Acta Montanistica Slovaca,* – Vol. 7. – No. 2. – Pp. 131 – 137.

6. Vinagre B. M., Podlubny I., Dorcak L., and Feliu V. Fractional PID Controllers: A frequency Domain Approach [Text], (2000), *Proc. Of IFAC Workshop on Digital Control – Past, Present and Future of PID Control,*pp. 53 – 58.

7. Petras I., Dorcak L., and Kostial I. Control Quality Enhancement by Fractional order Controllers [Text], (1998), *Acta Montanistica Slovaca,* Vol. 3, No. 2,pp. 143 –148.

8. Кардашов А. А. Применение z-преобразования для экспоненциальной аппроксимации корреляционных и переходных функций / А. А. Кардашов // Автоматика и телемеханика. − 1968. − № 3. − С. 61 − 70.

9. Dzieliński A., Sierociuk D., and Sarwas G. Some Applications of Fractional order Calculus [Text], (2010), *Bulletin Of Polish Academy Of Sciences,* Warsaw, *Technical Sciences,* Vol. 58 (4),pp. 583 – 592.

10. Fortuna L., Graziani S., Muscato G., Nunnari G., and Porto D. Approximation of High-Order Lumped Systems by using Non-Integer Order Transfer Functions [Text], (1999), *Proceedings of the 7th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED99),* pp. 2222 – 2230.

Отримано 21.03.2014

References

1. Vasil'ev V.V., and Simak L.A. Drobnoe ischislenie i approksimatsionnye metody v modelirovanii dinamicheskikh sistem [Fractional Calculus and Approximation Methods for Modeling of Dynamic Systems] (2008), Kiev, NAN Ukrainy, 256 p. (In Russian).

2. Busher V.V. Dinamicheskie svoistva sistem upravleniya s drobnym poryadkom astatizma [Dynamic Properties of Control Systems with Fractional order Astatism], (2010), *Elektrotehnichni ta Komp'juterni Systemy,* Kiev, Ukraine, *Tehnika,* No. 01 (77), pp. 13 − 16 (In Russian).

3. Marushchak Ya.Yu., Kopchak B.L., Kopchak L.S., and Tsyapa V.B. Doslidzhennja systemy avtomatychnogo keruvannja naprugy avtonomnogo asynhronnogo generatora z reguljatoramy drobovogo porjadku [Research of Automatic Voltage Control Autonomous Induction Generator with Fractional Order Controllers], (2012), *Elektromehanichni ta Energozberigajuchi Systemy. Tematychnyj vypusk "Problemy Avtomatyzovanogo Elektropryvoda. Teorija i Praktyka" Naukovo-vyrobnychogo Zhurnalu,* Kremenchuk, KrNU, Vip. 3/2012 (19), pp. 405 – 407 (In Ukrainian).

4. Maiti D., Biswas S., and Konar A. Design of a Fractional Order PID Controller Using Particle Swarm Optimization Technique, (2008), *Proceeding 2nd – National Conference on Recent Trends in Information Systems (ReTIS-08),* 5 p.

5. Petras I., and Vinagre B.M. Practical Application of Digital Fractional-order Controller to Temperature Control, (2002), *Acta Montanistica Slovaca,* Vol. 7, No. 2, pp. 131 – 137.

6. Vinagre B.M., Podlubny I., Dorcak L., and Feliu V. Fractional PID Controllers: A Frequency Domain Approach, (2000), *Proc. Of IFAC Workshop on Digital Control – Past, Present and Future of PID Control*, pp. 53 – 58.

7. Petras I., Dorcak L., and Kostial I. Control Quality Enhancement by Fractional Order Controllers, (1998), *Acta Montanistica Slovaca*, Vol. 3, No. 2, pp. 143 – 148.

8. Kardashov A.A. Primenenie z-preobrazovaniya dlya eksponentsial'noi approksimatsii korrelyatsionnykh i perekhodnykh funktsii [Application of the z-transform for the Exponential Approximation of the Correlation and Response Functions], (1968), *Avtomatika i Telemekhanika,* No. 3, pp. 61 − 70.

9. Dzieliński A., Sierociuk D., and Sarwas G. Some Applications of Fractional Order Calculus, (2010), *Bulletin Of Polish Academy Of Sciences,* – Warsaw, *Technical Sciences*, Vol. 58 (4), pp. 583 – 592.

10. Fortuna L., Graziani S., Muscato G., Nunnari G., and Porto D. Approximation of High-Order Lumped Systems by using Non-Integer Order Transfer Functions, (1999), *Proceedings of the 7th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED99),* pp. 2222 – 2230.

Копчак Богдан Любомирович,
докторант, к.т.н., доц.
каф. ЕМА Нац. ун-т
Львівська політехніка",
Львів-13, вул. Бандери 12,
р/тел. (032) 258-22-38.
E-mail: kopchak@mail.ru