УДК 531.8
В. С. Ловейкін, д-р техн. наук,
Ю. О. Ромасевич, канд. техн. наук

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО РЕЖИМУ РУХУ МЕХАНІЗМІВ ВАНТАЖОПІДЙОМНИХ МАШИН ЗА КРИТЕРІЄМ ДИНАМІЧНОЇ ПОТУЖНОСТІ

Анотація. *Розв'язано варіаційну задачу визначення оптимального режиму руху механізму вантажопідйомної машини. Рух механізму описується диференціальним рівнянням другого порядку. Для оптимального закону руху розраховано динамічні, кінематичні та енергетичні показники, які можуть бути використані для вибору приводу механізму.*
Ключові слова: *вантажопідйомна машина, оптимізація руху, рівняння Ейлера-Лагранжа, функціонал, умовний екстремум, корекція розв'язку, перевантажувальна здатність привода*

V. S. Loveikin, ScD.,
Yu. O. Romasevich, PhD.

OF THE SYNTESIS OF OPTIMAL MOVEMENT MODE OF LOAD-LIFTING MACHINES BY DYNAMICAL POWER CRITERION

Abstract. *The variation problem of load-lifting machine's mechanism optimal movement mode has been solved. The mechanism movement is describing by differential equation of second order. Dynamical, kinematical, power indexes has been calculated for optimal movement law, which may be using for mechanism drive selection.*
Keywords: *load-lifting machines, movement optimization, Euler-Lagrange equation, functional, conditional extremum, correction of decision, overload capacity of drive*

В. С. Ловейкин, д-р техн. наук,
Ю. О. Ромасевич, канд. техн. наук

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО РЕЖИМА ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЗМОВ ГРУЗОПОДЪЕМНЫХ МАШИН ПО КРИТЕРИЮ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОЩНОСТИ

Аннотация. *Решена вариационная задача определения оптимального режима движения механизма грузоподъемной машины. Движение механизма описывается дифференциальным уравнением второго порядка. Для оптимального закона движения рассчитаны динамические, кинематические и энергетические показатели, которые могут быть использованы для выбора привода механизма.*
Ключевые слова: *грузоподъемная машина, оптимизация движения, уравнение Эйлера-Лагранжа, функционал, условный экстремум, коррекция решения, перегрузочная способность привода*

Постановка проблеми

Для великої кількості механізмів вантажопідйомних машин важливим показником їх роботи є рівень динамічної потужності приводу. Зменшення рівня динамічної потужності приводу дає змогу експлуатувати механізми вантажопідйомних машин з вищим ККД, що, у свою чергу, зменшує шкідливі витрати енергії на нагрівання приводу та зношування елементів механізму. Крім того, зменшення динамічної потужності приводу дає можливість ґрунтовніше підходити до розрахунку потужності приводу.

Досягти зменшення динамічної потужності можна, обравши певний режим роботи механізму. Під режимом роботи розуміється зміна кінематичних та динамічних характеристик механізму в часі (розглядається програмне керування). Із усього різноманіття режимів роботи механізмів вантажопідйомних машин необхідно обрати один, за яким показник динамічної потужності приводу буде найнижчим. Такий режим роботи називається оптимальним. У даному дослідженні відшукується саме оптимальний режим роботи механізму вантажопідйомної машини за критерієм середньоквадратичного значення динамічної потужності приводу механізму.

Аналіз останніх досліджень та публікацій

Оптимізація режимів руху механізмів вантажопідйомних машин може виконуватись варіаційним численням [1], застосуванням принципу максимуму Л.С.Понтрягіна [2], динамічним програмуванням [3] та різноманітними наближеними методами [4–9]. Використання вказаних методів для лінійних задач дає змогу досить легко отримати функцію оптимального керування. Що стосується нелінійних задач оптимізації, до яких належить задача мінімізації динамічної потужності приводу, то їх розв'язання не завжди можна знайти у аналітичному вигляді і тому часто використовують наближені методи.

Задача мінімізації динамічної потужності розв'язана у роботі [8] у неявному вигляді для всього циклу переміщення механізму. Це накладає обмеження на практичну реалізацію отриманого результату. Ця ж задача була розв'язана прямим варіаційним методом у роботі [9]. Крім того, у роботі [7] розв'язок дозволяє усунути „жорсткі" та „м'які" удари у приводі механізму.

Мети та завдання дослідження

Метою проведеного дослідження є розв'язання задачі оптимізації режиму розгону механізму вантажопідйомної машини у варіаційній постановці. Для досягнення поставленої мети потрібно:

1) розв'язати варіаційну задачу мінімізації інтегрального функціоналу, який відображає середнє значення квадрату динамічної потужності приводу механізму вантажопідйомної машини;

2) проаналізувати отриманий результат та виконати корекцію розв'язку;

3) розрахувати кінематичні та динамічні показники, які відповідають корегованому оптимальному режиму руху механічної системи.

Виклад основного матеріалу

Приймемо таку математичну модель руху механізму вантажопідйомної машини:

$$m\ddot{x} = F - W = F_{\text{äèí}}, \qquad (1)$$

де m – зведена до поступального руху маса механізму та його приводу; x –узагальнена координата механізму (у даному дослідженні використано лінійні координати); F – зведена до поступального руху сила приводного механізму; W – сила опору переміщення механізму у тому числі технологічного характеру; $F_{дин}$ – динамічна складова приводного зусилля.

Рівняння (1) у першому наближенні описує динаміку руху механізмів вантажопідйомних машин: переміщення прольотного крана, зміни вильоту та повороту баштового крана, підйому вантажу тощо (вважаємо, що маса вантажу приєднана до маси основного механізму).

Таким чином, представлена задача є першою спробою синтезу оптимального керування без врахування впливу зазорів, пружно-в'язких та інших динамічних факторів, що діють у механізмі. Зазначимо, що у подальших дослідженнях у цьому напрямку будуть враховані необхідні ускладнення математичних моделей механізмів вантажопідйомних машин.

Оптимізацію режиму розгону механізму (1) виконаємо за критерієм мінімуму інтегрального функціоналу, який із врахуванням позначення $\dot{x} = y$ записується таким чином:

$$I = \frac{1}{\text{Ò}}\int_0^T P_{\text{äèí}}^2\,dt = \frac{1}{\text{Ò}}\int_0^T (F_{\text{äèí}}\,\text{ó})^2\,dt \to \min, \qquad (2)$$

де $P_{\text{äèí}}$ – динамічна складова потужності приводного механізму; T – тривалість розгону механічної системи. Для коректної постановки варіаційної задачі необхідно у підінтегральний вираз функціоналу (2) ввести рівняння зв'язку (1). Отже, варіаційна задача полягає у тому, щоб знайти екстремум функціоналу

$$I_{\text{ô}} = \frac{1}{\text{Ò}}\int_0^T \Big((F_{\text{äèí}}\,\text{ó})^2 + \lambda(F_{\text{äèí}} - m\dot{y}) \Big)\,dt \to \min, \qquad (3)$$

де λ – невизначений множник Лагранжа. Умовою мінімуму критерію (3) є система рівнянь Ейлера-Лагранжа [1]

$$\begin{cases} 2F_{\text{äèí}}^2\,\text{ó} + m\dot{\lambda} = 0; \\ 2F_{\text{äèí}}\,\text{ó}^2 + \lambda = 0. \end{cases} \qquad (4)$$

Здиференціюємо друге рівняння системи (4) за часом, у результаті чого отримаємо

$$2\dot{F}_{\text{äèí}}\,\text{ó}^2 + 4F_{\text{äèí}}\,\text{óŏ} + \dot{\lambda} = 0. \qquad (5)$$

Із виразу (5) неважко знайти вираз для $\dot{\lambda}$:

$$\dot{\lambda} = -2\dot{F}_{\text{äèí}}\,\text{ó}^2 - 4F_{\text{äèí}}\,\text{óŏ}. \qquad (6)$$

Знайдемо тепер вираз для $\dot{F}_{\text{äèí}}$: продиференціюємо за часом ліву та праву частини диференціального рівняння (1) і, враховуючи позначення $\dot{x} = y$, запишемо:

$$\dot{F}_{\text{äèí}} = m\text{ŏ}. \qquad (7)$$

Підставляючи $\dot{\lambda}$ та $\dot{F}_{\text{äèí}}$ з виразів (6) та (7) у перше рівняння (4), отримаємо остаточно

$$y\dot{y}^2 + y^2\ddot{y} = 0. \tag{8}$$

Рівняння (8) є нелінійним диференціальним рівнянням другого порядку. Для того, щоб знайти його розв’язок, виконаємо заміну

$$z(y) = \dot{y}^2, \tag{9}$$

як це зроблено у праці [10]. Із врахуванням заміни (9) рівняння Ейлера-Лагранжа (5) перепишемо таким чином:

$$z + \dot{z}\frac{2}{y} = 0. \tag{10}$$

Рівняння (10) є лінійним однорідним диференціальним рівнянням із змінними коефіцієнтами. Воно відрізняється від аналогічного рівняння, наведеного у роботі [10] тим, що його права частина рівна нулю.

Рівняння (10) має такий розв’язок:

$$z = \frac{\tilde{N}_1}{y^2}, \tag{11}$$

де C_1 – постійна інтегрування. Із врахуванням заміни (9) та розв’язку (11) сформуємо диференціальне рівняння для функції y:

$$\dot{y}^2 = \frac{\tilde{N}_1}{y^2}. \tag{12}$$

У роботі [10] рівняння, яке аналогічне рівнянню (12), розв’язане у неявному вигляді $t = t(y)$. Неявний вигляд розв’язку не дає змоги отримати важливі кінематичні, динамічні та енергетичні показники руху механізму, також ускладнюється реалізація оптимального закону руху механізму на практиці. Тому будемо шукати розв’язок рівняння (12) у вигляді $y=y(t)$. Диференціальному рівнянню (12) із початковою умовою $y(0)=0$ задовольняє чотири функції. Виберемо з них одну, яка відповідає фізичним умовам перехідного процесу:

$$y = \sqrt{2t\sqrt{C_1}}. \tag{13}$$

Умова досягнення усталеної швидкості ($y(T) = v$) в момент закінчення перехідного процесу приводить до алгебраїчного рівняння

$$\sqrt{2T\sqrt{C_1}} = v, \tag{14}$$

розв’язуючи яке отримаємо

$$C_1 = \frac{v^4}{4T^2}. \tag{15}$$

Підставляючи постійну інтегрування з (15) у вираз (14), остаточно запишемо екстремаль функціоналу (3):

$$y = v\sqrt{\frac{t}{T}}. \tag{16}$$

Знайдемо функцію прискорення механізму:

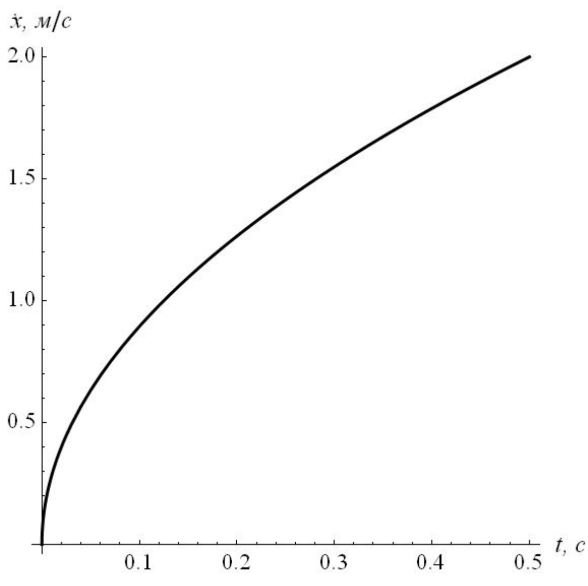
$$\dot{y} = \frac{d}{dt}\left(v\sqrt{\frac{t}{T}}\right) = \frac{v}{2\sqrt{T}}\sqrt{\frac{1}{t}}. \tag{17}$$

Враховуючи вирази (16) та (17), знайдемо вираз динамічної потужності приводного механізму:

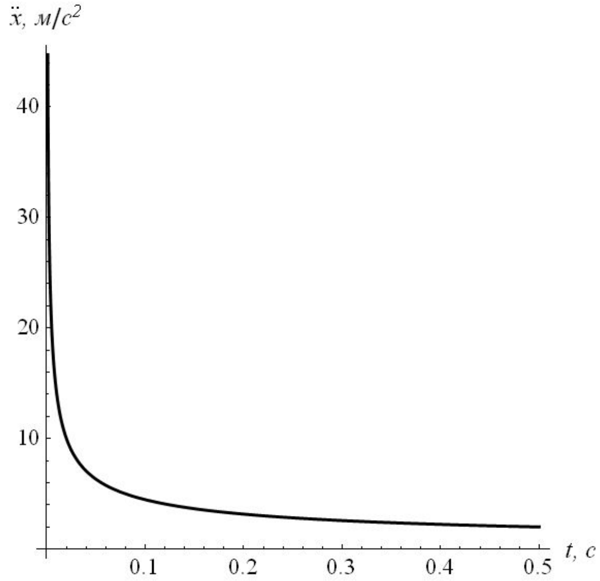
$$P_{\ddot{a}\grave{e}\acute{i}} = \frac{mv^2}{2T}. \tag{18}$$

Таким чином, для досягнення мінімуму функціоналу (3) необхідно протягом перехідного процесу до механізму підводити незмінну потужність, яка визначається за виразом (18). Вираз (18) дає можливість виконувати розрахунок приводу механізму вантажопідйомної машини. Проте, у подальшому виконаємо корекцію оптимального закону (16) і вираз (18) необхідно уточнити.

Побудуємо графіки функцій (16) та (17) (рис. 1) при таких параметрах: T=0,5 с, v=2 м/с (графік прискорення обмежений).



а



б

Рис. 1. Графіки кінематичних функцій:
а – швидкість; б – прискорення механізму вантажопідйомної машини

Аналізуючи вираз (17), можна записати таку рівність

$$F_{\text{äèí}}(0) = m\dot{y}(0) = \frac{v}{2\sqrt{T}} \lim_{t\to 0} \sqrt{\frac{1}{t}} = \infty. \quad (19)$$

Рівняння (18) несумісне із фізичними умовами реалізації оптимального режиму роботи механізму. У роботі [10] оптимальний закон руху було змінено (відкореговано) таким чином, щоб виключити умови, які подібні умові (19). Використаємо такий же підхід. Для цього спочатку знайдемо значення кінематичних функцій оптимального закону руху (16) у певні моменти часу. Швидкість механізму у момент часу $t=Tn$ визначається за виразом

$$y(\grave{O}n) = v\sqrt{n}, \quad (20)$$

де n – коефіцієнт, який позначає долю першого етапу розгону механізму від тривалості всього розгону; прискорення та ривок в той же момент часу:

$$\dot{y}(Tn) = \frac{v}{2T\sqrt{n}}, \quad (21)$$

$$\ddot{y}(Tn) = -\frac{v}{4Tn\sqrt{nT}}, \quad (22)$$

відповідно. Надалі сформуємо крайові умови, яким має відповідати коригувальна функція, що заміняє екстремаль протягом першого етапу розгону (індекс „*кор*” означає коригувальну функцію, цифра у індексі позначає етап розгону механізму, на якому коригується екстремаль):

$$\begin{cases} y_{\text{êîð1}}(0) = \dot{y}_{\text{êîð1}}(0) = \ddot{y}_{\text{êîð1}}(0) = 0; \\ y_{\text{êîð1}}(Tn) = v\sqrt{n};\ \dot{y}_{\text{êîð1}}(Tn) = \dfrac{v}{2T\sqrt{n}}. \\ \ddot{y}_{\text{êîð1}}(Tn) = -\dfrac{v}{4Tn\sqrt{nT}}. \end{cases} \quad (23)$$

Вибір початкових умов у системі (23) дає змогу отримати коригувальну функцію, яка забезпечує відсутність „жорстких” та „м’яких” ударів на початку руху. Крім того, забезпечується плавність сполучення коригувальної функції $y_{\text{êîð}1}(t)$ та екстремалі.

Будемо шукати коригувальну функцію $y_{\text{êîð}1}(t)$ у вигляді полінома шостого степеня:

$$y_{\text{êîð1}}(t) = \sum_{i=0}^{6} A_i t^i, \quad (24)$$

де A_i – коефіцієнти полінома, які визначають виходячи з умов (23). Не будемо детально описувати методику знаходження коефіцієнтів, а запишемо остаточний результат:

$$y_{\text{êîð1}}(t) = \frac{v^2 t^3}{8\sqrt{n^9 T^5}}(35t^2 - 90ntT + 63n^2T^2). \quad (25)$$

Аналогічно запишемо умови, яким повинна відповідати коригувальна функція для третього етапу руху (другий етап руху вважаємо рухом за оптимальним законом (16)):

$$\begin{cases} y_{\text{êîð3}}(Tk) = v\sqrt{k};\ \dot{y}_{\text{êîð3}}(Tk) = \dfrac{v}{2T\sqrt{k}}; \\ \ddot{y}_{\text{êîð3}}(Tk) = -\dfrac{v}{4Tk\sqrt{kT}}; \\ y_{\text{êîð3}}(0) = v;\ \dot{y}_{\text{êîð3}}(0) = \ddot{y}_{\text{êîð3}}(0) = 0, \end{cases} \quad (26)$$

де k – коефіцієнт, який позначає долю третього етапу розгону механізму від тривалості всього розгону. Запишемо вираз для коригувальної функції на третьому етапі:

$$\begin{aligned} y_{\hat{e}\hat{i}\eth 3}(t) = {} & \frac{v}{8(\sqrt{k}-1)^4(\sqrt{k}+1)^5\sqrt{k^3}T^5}((1+\sqrt{k}- \\ & -13k+35\sqrt{k^3})t^5-3(1+\sqrt{k}-11k+29\sqrt{k^3}-10\times \\ & \times k^2+30\sqrt{k^5})t^4T+(3+3\sqrt{k}-21k+59\sqrt{k^3}-85\times \\ & \times k^2+235\sqrt{k^5}-17k^3+63\sqrt{k^7})t^3T^2-(1+\sqrt{k}- \\ & -5k+5\sqrt{k^3}-75k^2+165\sqrt{k^5}-51k^3+189\sqrt{k^7})t^2\times \\ & \times T^3+3k(2+2\sqrt{k}-5k-5\sqrt{k^3}-17k^2+63\sqrt{k^5})\times \\ & \times tT^4+k^2(3+3\sqrt{k}-15k-15\sqrt{k^3}+48k^2-32\sqrt{k^5}- \\ & -32k^3+8\sqrt{k^7}+8k^4)T^5). \end{aligned} \qquad (27)$$

Остаточно запишемо закон руху механізму вантажопідйомної машини із врахуванням коригування:

$$y_{\hat{i}\ddot{i}\grave{o}.\hat{e}\hat{i}\eth} = \begin{cases} y_{\hat{e}\hat{i}\eth 1}, & t\in[0;\ Tn]; \\ v\sqrt{\dfrac{t}{T}}, & t\in[Tn;\ Tk]; \\ y_{\hat{e}\hat{i}\eth 3}, & t\in[Tk;\ T]. \end{cases} \qquad (28)$$

Для того, щоб закон руху (28) можна було реалізувати, також необхідно задати таку нерівність:

$$n-k\le 0. \qquad (29)$$

Якщо нерівність перетворюється у рівність, то закон руху (28) вироджується і стає неоптимальним. Проілюструємо отриманий результат за допомогою графіків (рис. 2), побудованих для випадку k = 0,9, n = 0,1.

Із рис. 2 видно, що характер руху механізму є плавним. Динамічна потужність, яка витрачається на збільшення кінетичної енергії механізму, має два максимуми, що пов'язано із аналогічними максимумами на графіку прискорення механізму.

Необхідно дати оцінку величині глобального максимуму приводного зусилля, яке відповідає одному із локальних максимумів на графіку прискорення. Це потрібно для того, щоб забезпечити перевантажувальну здатність приводу.

Досліджуючи на максимум першу похідну функції $y_{\hat{e}\hat{i}\eth 1}$, знайдемо максимальне значення прискорення та, із врахуванням диференціального рівняння (1), запишемо максимальне значення приводного зусилля на першому етапі розгону:

$$F_{1\max} = \frac{729(407+40\sqrt{30})mv}{274400\sqrt{n}T}+W. \qquad (30)$$

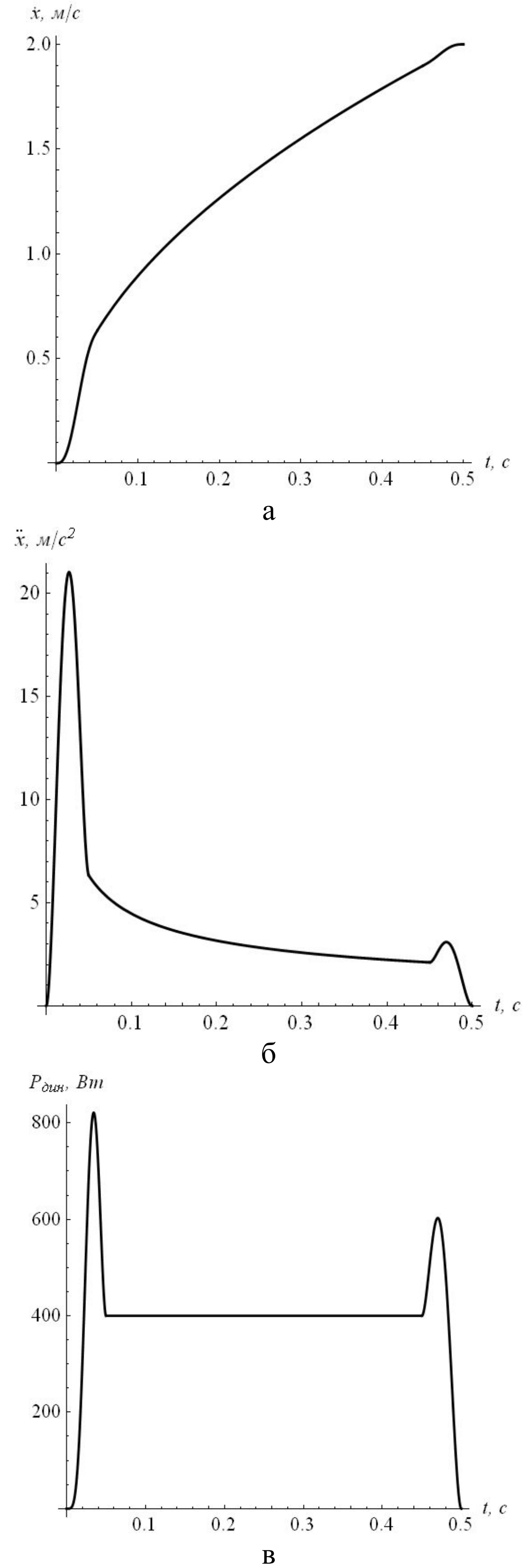


Рис. 2. Графіки, які відповідають коригованому оптимальному закону (28): швидкість (а) та прискорення (б) механізму вантажопідйомної машини, динамічна потужність приводу механізму (в)

Відмітимо, що:

$$\lim_{n\to 0} F_{1\max} = \infty. \qquad (31)$$

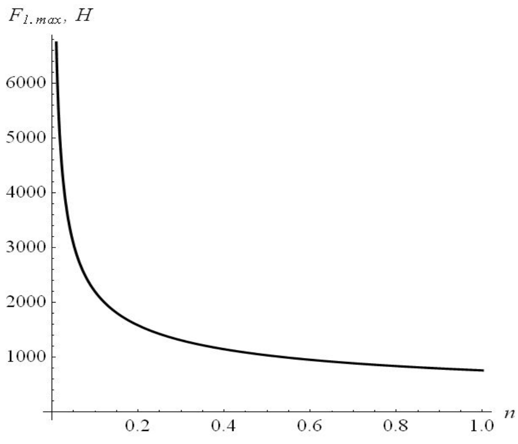
Провівши аналогічне дослідження для третього етапу розгону механізму отримаємо:

$$\begin{aligned}
F_{3\max} &= [m(-((6(k-1)(1+\sqrt{k}-15k+45\sqrt{k^3})T+\\
&+\sqrt{6}T(k-1)(1+2\sqrt{k}-29k+20\sqrt{k^3}+295k^2-\\
&-1030\sqrt{k^5}+1125k^3)^{\frac{1}{2}})^2(-3((k-1)(1+2\sqrt{k}-\\
&-29k+100\sqrt{k^3}+335k^2-1670\sqrt{k^5}+2925k^3)\times\\
&\times T+2\sqrt{6}(1+2\sqrt{k}-15k+45\sqrt{k^3})(k-1)T)\times\\
&\times(1+2\sqrt{k}-29k+20\sqrt{k^3}+295k^2-1030\sqrt{k^5}+\\
&+1125k^3)^{\frac{1}{2}})v)][8000T^4\sqrt{k^3}(1+\sqrt{k})^4(k(14-48\times\\
&\times\sqrt{k}+35k)-1)^3]^{-1}+W.
\end{aligned} \qquad (32)$$

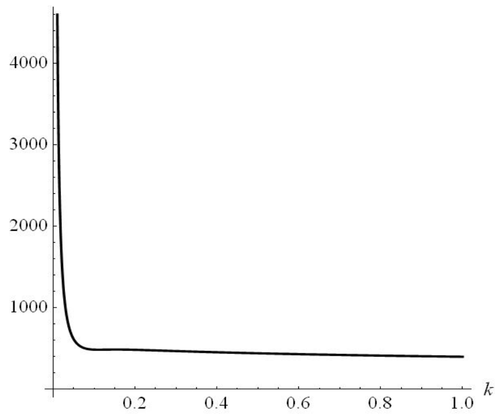
Для $F_{3\max}$ можемо записати рівність

$$\lim_{k\to 0} F_{3\max} = \infty. \qquad (33)$$

Побудуємо графіки функцій $F_{1\max}$ та $F_{3\max}$ (рис. 3). При побудові графіків прийнято $W = 0{,}1mg$; n та k змінюються у межах [0,01; 1].



а



б

Рис. 3. Графіки локально–максимальних приводних зусиль: F_{1max} (а) та F_{3max} (б)

Якщо при реалізації оптимальних законів на практиці покласти $1-k=n$, що відповідає рівності першого та третього етапів розгону механізму вантажопідйомної машини, то тоді правильною буде рівність:

$$F_{\max} = F_{1\max}, \qquad (34)$$

де $F_{\max}$ – глобально–максимальне значення приводного зусилля.

Оцінимо зміну величини критерію (2) при корекції екстремалі. Для цього необхідно знайти визначений інтеграл

$$\begin{aligned}
I_{\hat{e}\hat{i}\eth} &= \frac{m^2}{T}\int_0^T (y_{\hat{i}\ddot{i}\grave{o}.\hat{e}\hat{i}\eth}\dot{y}_{\hat{i}\ddot{i}\grave{o}.\hat{e}\hat{i}\eth})^2 dt = \frac{m^2}{T}\times\\
&\times(\int_0^{Tn}(y_{\hat{e}\hat{i}\eth 1}\dot{y}_{\hat{e}\hat{i}\eth 1})^2 dt + \int_{Tn}^{Tk}(y\dot{y})^2 dt + \int_{Tk}^{T}(y_{\hat{e}\hat{i}\eth 3}\dot{y}_{\hat{e}\hat{i}\eth 3})^2 dt).
\end{aligned} \qquad (35)$$

Оцінку будемо робити за відносною величиною критерію:

$$\tilde{I} = \frac{I_{\hat{e}\hat{i}\eth}}{I} = \frac{I_{\hat{e}\hat{i}\eth}}{\int_0^T (y\dot{y})^2 dt}. \qquad (36)$$

Показник (36) є аналогом запропонованого у роботі [11] показника безрозмірної питомої дії за Аппелем. Різниця між показником (36) та запропонованим у роботі [11] полягає у тому, що дійсні витрати динамічної потужності, які входять у чисельник показника із роботи [11], заміняються на витрати цієї потужності при русі механізму за коригованим оптимальним законом.

Побудуємо графік зміни показника $\tilde{I}$ при зміни коефіцієнтів k та n (рис. 4).

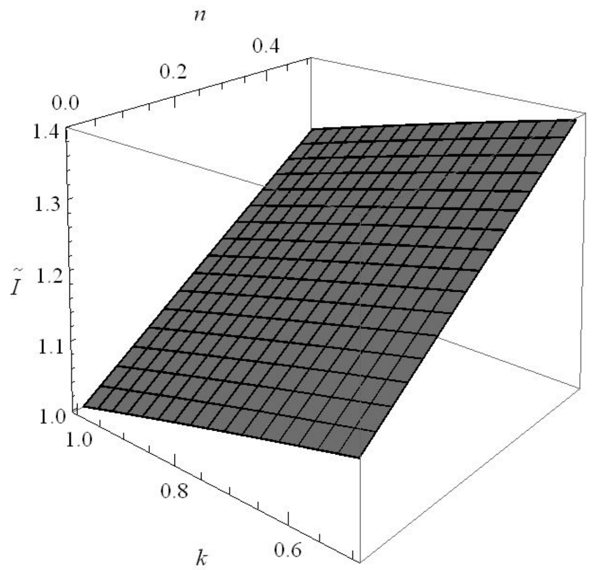


Рис. 4. Графік залежності показника $\tilde{I}$ від коефіцієнтів k та n

Аналіз графіка (рис. 4) показує, що

$$\lim_{\substack{n\to 0\\ k\to 1}} \tilde{I} = 1. \tag{37}$$

Крім того, на основі аналізу виразу $\tilde{I}$ можна записати таку рівність:

$$\lim_{\substack{n\to 0,5\\ k\to 0,5}} \tilde{I} = 1,3919. \tag{38}$$

Тобто максимальне збільшення величини функціоналу (2) при корекції екстремалі можливе у 1,3919 раза.

Висновки

1) Розв’язано оптимізаційну задачу зменшення динамічної складової потужності приводного механізму;

2) оптимальний закон руху механізму вантажопідйомної машини був скорегований для усунення небажаних динамічних навантажень;

3) визначено, що максимальне збільшення функціоналу можливе у 1,3919 рази при виродженні коригованої екстремалі;

4) встановлено глобально-максимальне значення приводного зусилля, що необхідно для перевірки перевантажувальної здатності приводного двигуна;

5) отримані результати можуть бути використані для розробки алгоритмів керування приводами механізмів вантажопідйомних машин.

Список використаної літератури

1. Петров, Ю. П. Вариационные методы теории оптимального управления / Ю. П. Петров. – Л. : Энергия, 1977. – 280 с.

2. Понтрягин, Л. С. Математическая теория оптимальних процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтнянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. – М. : Физматгиз, 1961. – 392 с.

3. Беллман, Р. Динамическое программирование / Р. Беллман – Под.ред. Воробьева Н. Н. – М. : Издательство иностранной литературы, 1960. – 400 с.

4. Моисеев, Н. Н. Численные методы в теории оптимальных систем / Н. Н. Моисеев. – М. : Наука, 1971. – 424 с.

5. Бутов, В. Г. Исследование вариационных задач прямими методами // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2008. – Т. 48. – № 3. – С. 373 – 386.

6. Сеньо, П. С. Прямые интервальные методы решения вариационных задач и задач оптимального управления // Динамические системы. – 2004. – Вып. 18. – С. 44 – 50.

7. Stryk, O. Numerical solution of optimal control problems by direct collocation / O. Stryk // Optimal control. International series of Numerical Mathematic. – 1993. – P. 129 – 143.

8. Azhmyakov, V. Optimal control of mchanical systems / V. Azhmyakov // Hindawi publishing corporation . – 2007. – Vol. Differential equations and nonlinear mechanics – P. 135 – 151.

9. Ловейкін, В. С. Оптимізація перехідних режимів руху механічних систем прямим варіаційним методом / В. С. Ловейкін, Ю. О. Ромасевич. – К.– Ніжин: Видавець ПП Лисенко М. М. 2010. – 184 с.

10. Хитрик, В. Э. Методы динамической оптимизации механизмов машин-автоматов / В. Э. Хитрик. – Л. : Изд-во Ленингр. Ун-та, 1974. – 116 с.

11. Ловейкин, В. С. Расчеты оптимальних режимов движения механизмов строительных машин / В. С. Ловейкин. – К.: УМК ВО, 1990. – 168 с.

Отримано 29.01.2013

References

1. Petrov, Yu. P. Variation methods of optimal control theory / Yu. P. Petrov – Leningrad: Energia, 1977. – 280 p. [in Russian].

2. Pontryagin, L. S. Mathematical theory of optimal processes/ L. S. Pontryagin, V. G. Bolnyanskiy, R. V. Gamkrelidze, E. F. Mistchenko – Moscow : Phizmatgiz, 1961. – 392 p. [in Russian].

3. Bellman, R. Dynamical programming – edited by Vorobyuov N. N. / R. Bellman – Moscow : Publisher of foreign literature, 1960. – 400 p. [in Russian].

4. Moiseev, N. N. methods in optimal systems theory / N. N. Moiseev –Moscow : Nauka, 1971. – 424 p. [in Russian].

5. Butov, V. G. Variation problem researching with direct methods / V. G. Butov // The journal of estimated mathematic and mathe-

matical physics. – 2008. – Vol. 48. – № 3. – P. 373 – 386 [in Russian].

6. Senio, P. S. Direct interval methods of solving variation problems and problems of optimal control / P. S. Senio // Dynamical systems. – 2004. – Vol. 18. – P. 44 – 50 [in Russian].

7. Stryk, O. Numerical solution of optimal control problems by direct collocation / O. Stryk // Optimal control. International series of Numerical Mathematic. – 1993. – P. 129 – 143.

8. Azhmyakov, V. Optimal control of mchanical systems / V. Azhmyakov // Hindawi publishing corporation . – 2007. – Vol. Differential equations and nonlinear mechanics. – P. 135 – 151.

9. Loveikin, V. S. Mechanical systems transition regimes optimization with direct variation method / V. S. Loveikin, Yu. O. Romasevich – Kyiv–Nizhin: Publisher PP Lisenko M.M., 2010. – 184 p. [in Ukrainian].

10. Hitrik, V. E. Methods of dynamical optimization of automatic machines mechanisms / V. E. Hitrik – Leningrad : Publisher of Leningrad University, 1974. – 116 p. [in Russian].

11. Loveikin, V. S. Calculus of optimal regimes movement of load-lifting machines mechanisms / V. S. Loveikin – Kyiv : UMK VO, 1990. – 168 p. [in Russian].

Ловейкін Вячеслав Сергійович, д-р техн. наук, зав. каф. конструювання машин Нац. ун-ту біоресурсів і природокористування України, м. Київ, вул. Героїв оборони, 12, 03041.
тел. роб.: (044)527-87-34.

Ромасевич Юрій Олександрович, канд. техн. наук, докторант каф. конструювання машин Нац. ун-ту біоресурсів і природокористування України,
м. Київ, вул. Героїв оборони, 12, 03041.
тел. роб.: (044)527-87-34.
E-mail: d.um@mail.ru