

УДК 62.83

**В. А. Войтенко**, канд. техн. наук

### ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ПЛАНЕТАРНЫЙ РЕДУКТОР КАК ЭЛЕМЕНТ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

*Аннотация.* Рассмотрена математическая модель дифференциального планетарного редуктора, получены уравнения связи угловых скоростей и моментов основных звеньев. Показано, что планетарный редуктор на структурных схемах систем управления можно представлять сумматором угловых скоростей и распределителем моментов между валами его основных звеньев.

*Ключевые слова:* планетарный редуктор, коронная шестерня, водило, солнечная шестерня, угловая скорость, момент сил, уравнения связи.

**V. A. Voytenko**, PhD.

### DIFFERENTIAL PLANETARY REDUCING GEAR AS ELEMENT OF CONTROL SYSTEM

*Abstract.* The mathematical model of differential planetary reducing gear is considered, equalizations of communication of angular speeds and moments of basic parts are got. It is shown that planetary reducing gear on the flow diagrams of the control systems it is possible to represent by summarization of angular speeds and distributor of moments between the billows of his basic links.

*Keywords:* planetary reducing gear, crown cog-wheel, led, sun cog-wheel, angular speed, moment of forces, equalization of communication.

**В. А. Войтенко**, канд. техн. наук

### ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИЙ ПЛАНЕТАРНИЙ РЕДУКТОР ЯК ЕЛЕМЕНТ СИСТЕМИ КЕРУВАННЯ

*Анотація.* Розглянуто математичну модель диференціального планетарного редуктора, одержано рівняння зв'язку кутових швидкостей і моментів його основних ланок. Показано, що планетарний редуктор на структурних схемах систем керування можна представляти суматором кутових швидкостей і розподільником моментів між валами його основних ланок.

*Ключові слова:* планетарний редуктор, коронна шестірня, водило, сонячна шестірня, кутова швидкість, момент сил, рівняння зв'язку.

Планетарные редукторы (ПР) широко применяют в машиностроении. Это объясняется тем, что при одинаковых значениях передаваемого момента их масса и габаритные размеры значительно меньше, чем у других передаточных механизмов вследствие распределения окружного усилия между зубчатыми зацеплениями нескольких сателлитов и уменьшения сил, прикладываемых к зубьям шестерен [1, 2, 3]. Поэтому в ПР используют шестерни меньшего размера с меньшими зубьями.

Обычно в литературе рассматривают ПР с неподвижным водилом или коронной шестерней. С целью более полного использования возможностей ПР при разработке многодвигательных электроприводов представляет интерес рассмотреть работу дифференциального ПР, в котором подвижными являются все три основных звена.

Основными звеньями ПР являются: солнечная шестерня 1, водило 2 (на виде сбоку обозначено буквой В) и коронная шестерня 3. На рис.1 упрощённо показаны только начальные окружности зацепления зубьев шестерен. Оси вращения солнечной шестерни (СШ), водила и коронной шестерни (КШ) совпадают и проходят через точку  $O_1$ . На водиле закреплены оси  $O_{21}$  и  $O_{22}$ , на которых установлены сателлиты или планетарные шестерни (ПШ) 21 и 22. Оси  $O_{21}$  и  $O_{22}$  вращаются вместе с водилом относительно оси  $O_1$ , а ПШ – относительно осей  $O_{21}$  и  $O_{22}$ .

Определим соотношения между значениями угловых скоростей основных звеньев ПР. Для этого обозначим  $z_1$  – количество зубьев на СШ,  $z_{21}$  – количество зубьев на ПШ,  $z_3$  – количество зубьев, расположенных на внутренней стороне КШ. Если учесть, что при одинаковом окружном модуле зубьев шестерен, участвующих в зацеплении, количество их зубьев равно частному от деления диаметров их начальных окружностей на ок-

© Войтенко В.А., 2012

ружной модуль [2], то на основании рис.1 можно записать

$$z_3 = z_1 + 2z_{2i}. \quad (1)$$

Направление вращения всех шестерен и водила против часовой стрелки будем считать положительным. В неподвижной системе координат поворот СШ на угол  $\varphi_1$ , а водила – на угол  $\varphi_2$  сопровождается поворотом ПШ относительно осей вращения  $O_{21}$  или  $O_{22}$  на угол

$$\varphi_{2i} = (\varphi_2 - \varphi_1) \frac{z_1}{z_{2i}}. \quad (2)$$

Угол поворота КШ относительно водила определяется выражением

$$\varphi_3 - \varphi_2 = \varphi_{2i} \frac{z_{2i}}{z_3}. \quad (3)$$

Из (3) следует, что в неподвижной системе координат угол поворота КШ

$$\varphi_3 = \varphi_2 + \varphi_{2i} \frac{z_{2i}}{z_3}. \quad (4)$$

После подстановки в (4)  $\varphi_{2i}$  из выражения (2) получим

$$\varphi_3 = \varphi_2 + (\varphi_2 - \varphi_1) \frac{z_1}{z_3} = \frac{z_1 + z_3}{z_3} \varphi_2 - \frac{z_1}{z_3} \varphi_1. \quad (5)$$

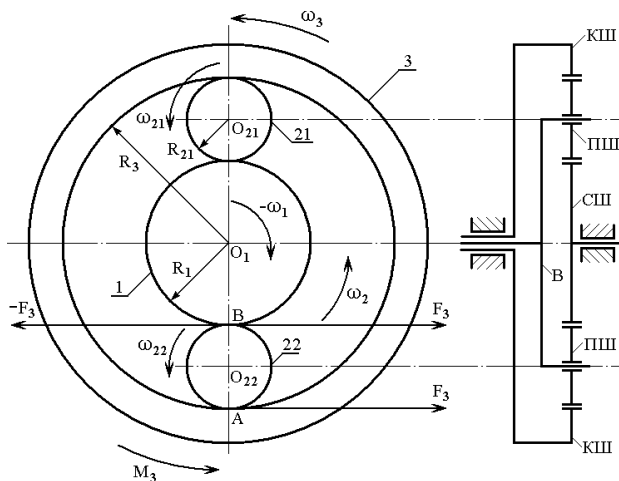


Рис. 1. Упрощённая схема ПР

Выражение (5) является уравнением связи углов поворота КШ, водила и СШ. Если продифференцировать по времени выражение (5), то получим уравнение связи угловых скоростей СШ  $\omega_1$ , водила  $\omega_2$  и КШ  $\omega_3$

$$\omega_3 = \frac{z_1 + z_3}{z_3} \omega_2 - \frac{z_1}{z_3} \omega_1 = \left(1 + \frac{z_1}{z_3}\right) \omega_2 - \frac{z_1}{z_3} \omega_1. \quad (6)$$

Из (6) следует, что если в качестве выходной переменной ПР рассматривать угловую скорость КШ, то она является алгебраической суммой угловых скоростей водила и СШ с весовыми коэффициентами, значения которых зависят от количества зубьев СШ и КШ. Таким образом, для того, чтобы регулировать угловую скорость КШ необходимо в соответствии с выражением (6) регулировать угловую скорость СШ и водила. В частности если поддерживать значение  $\omega_2 = \omega_{2-i} = const$  и регулировать скорость  $\omega_1$ , то согласно (6) получим множество графиков (рис.2), расположенных параллельно друг другу, и соответствующих разным постоянным значениям угловой скорости водила  $\omega_{2-1}, \omega_{2-2}, \omega_{2-3}, \omega_{2-4}$ . Характерными точками этих графиков являются точки *A* и *B*. В точке *A*  $\omega_1 = 0$ . При этом в соответствии с (6) угловая скорость КШ в точке *A*

$$\omega_{3A} = \frac{z_1 + z_3}{z_3} \omega_{2-i} = \left(1 + \frac{z_1}{z_3}\right) \omega_{2-i}. \quad (7)$$

В точке *B*  $\omega_3 = 0$ . При этом согласно (6) угловая скорость СШ в точке *B*

$$\omega_{1B} = \frac{z_1 + z_3}{z_1} \omega_{2-i} = \left(1 + \frac{z_3}{z_1}\right) \omega_{2-i}. \quad (8)$$

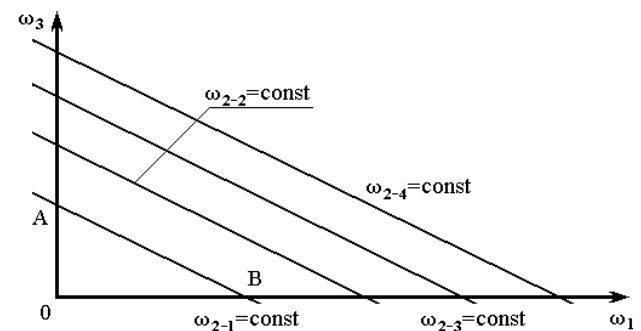


Рис. 2. Графики зависимости угловых скоростей основных звеньев ПР

Если учесть, что диаметр КШ превышает диаметр СШ и поэтому  $z_3 > z_1$ , то для обеспечения нулевой угловой скорости КШ необходимо вращать СШ со скоростью, более чем в два раза превышающей значение угловой скорости водила. При  $\omega_1 > \omega_{1B}$  направление вращения КШ изменится. Таким образом, реверс вращения КШ можно осуществить с помощью нереверсивных регулируемых приводов, приводящих в движение водило и СШ.

Определим уравнение связи моментов сил, приложенных к водилу, к СШ и к КШ. Для определённости будем считать, что к КШ прикладывается момент силы

$$\dot{M}_3 = F_3 R_3, \quad (9)$$

где  $F_3$  – результирующая сила, с которой зубья КШ давят на зубья ПШ;  $R_3$  – радиус начальной окружности зацепления зубьев КШ и ПШ относительно оси  $O_1$ .

В точке  $A$  (рис.1) на зубья ПШ со стороны зубьев КШ действует положительная результирующая сила  $F_3$ , которая создаёт положительный движущий момент, приложенный к водилу,

$$\dot{M}_{2-3} = F_3 (R_1 + 2R_{21}). \quad (10)$$

где  $R_1, R_{21}$  – радиусы начальных окружностей зацепления зубьев СШ и ПШ соответственно относительно осей  $O_1$  и  $O_{21}$ .

При движении звеньев ПР с постоянной скоростью в точке  $B$  (рис.1) на зубья СШ со стороны зубьев ПШ действует отрицательная результирующая сила ( $-F_3$ ), которая создаёт отрицательный движущий момент, приложенный к СШ,

$$\dot{M}_1 = -F_3 R_1. \quad (11)$$

Одновременно, в соответствии с третьим законом Ньютона, в точке  $B$  (рис.1) на зубья ПШ со стороны зубьев СШ действует положительная результирующая сила ( $+F_3$ ), создающая положительный движущий момент, приложенный к водилу,

$$\dot{M}_{2-1} = F_3 R_1. \quad (12)$$

Таким образом, к водилу прикладывается результирующий момент силы, который определяется суммой моментов  $M_{2-3}$  и  $M_{2-1}$ :

$$\begin{aligned} \dot{M}_2 &= \dot{M}_{2-3} + \dot{M}_{2-1} = F_3 (R_1 + 2R_{21}) + F_3 R_1 = \\ &= 2F_3 (R_1 + R_{21}). \end{aligned} \quad (13)$$

Из выражения (9)

$$F_3 = \frac{\dot{M}_3}{R_3}. \quad (14)$$

После подстановки в (11) и (13)  $F_3$  из (14)

$$\dot{M}_1 = -\frac{R_1}{R_3} M_3, \quad (15)$$

$$\dot{M}_2 = 2 \frac{(R_1 + R_{21})}{R_3} M_3. \quad (16)$$

Если учесть, что количество зубьев на КШ, СШ и ПШ пропорционально их радиу-

сам, то выражения (15) и (16) можно переписать

$$\dot{M}_1 = -\frac{z_1}{z_3} M_3, \quad (17)$$

$$\dot{M}_2 = 2 \frac{(z_1 + z_{21})}{z_3} M_3. \quad (18)$$

С учётом (1) выражение (18) принимает вид:

$$\begin{aligned} \dot{M}_2 &= \frac{2z_1 + 2z_{21}}{z_3} M_3 = \frac{z_1 + z_3}{z_3} M_3 = \\ &= \left(1 + \frac{z_1}{z_3}\right) M_3. \end{aligned} \quad (19)$$

Для проверки правильности полученных выражений рассмотрим баланс мощности механической энергии передаваемой от КШ к СШ и к водилу:

$$M_3 \omega_3 = M_2 \omega_2 + M_1 \omega_1. \quad (20)$$

После подстановки в (20)  $M_1$  и  $M_2$  из выражений (17) и (19)

$$M_3 \omega_3 = M_3 \left( \frac{z_1 + z_3}{z_3} \omega_2 - \frac{z_1}{z_3} \omega_1 \right). \quad (21)$$

С учётом (6) выражение (21) принимает вид:

$$M_3 \omega_3 = M_3 \omega_3.$$

Таким образом, баланс мощности сошёлся, что позволяет сделать вывод о правильности полученных выражений связи (6), (17) и (19).

Из (17) и (19) также следует, что

$$M_1 + M_2 = -\frac{z_1}{z_3} M_3 + \left(1 + \frac{z_1}{z_3}\right) M_3 = M_3. \quad (22)$$

Следовательно, для ПР справедлив баланс моментов сил, приложенных к СШ, водилу и к КШ. Например, если к КШ прикладывается движущий момент или момент сопротивления, то он в определённой пропорции передаётся и к водилу, и к СШ. Причём эта пропорция зависит от количества зубьев на СШ и на КШ. Учитывая, что  $z_1 < z_3$  на основании (17) и (19) можно утверждать, что момент, приложенный к СШ, будет значительно меньше момента, приложенного к КШ, и будет направлен встречно моменту  $M_3$ . Момент, приложенный к водилу, будет больше момента, приложенного к КШ, и будет совпадать с ним по направлению.

Если в качестве выходного звена ПР рассматривать водило, то выражение (6) принимает вид:

$$\omega_2 = \frac{z_3}{z_1+z_3} \omega_3 + \frac{z_1}{z_1+z_3} \omega_1. \quad (23)$$

Рассмотрим, как будет распределяться момент сил, приложенных к водилу, между СШ и КШ. Для этого обратимся к рис.1. Отличие от предыдущего случая (когда момент силы прикладывался к КШ) состоит в том, что при положительном моменте сил  $M_2$ , приложенных к водилу, к КШ и к СШ также будут прикладываться положительные моменты сил  $M_3$  и  $M_1$ . Поэтому после проведения выкладок, аналогичных (9)-(19), получим следующие выражения:

$$\dot{I}_1 = \frac{z_1}{z_1+z_3} \dot{I}_2, \quad (24)$$

$$M_3 = \frac{z_3}{z_1+z_3} \dot{I}_2. \quad (25)$$

Если рассматривать передачу энергии от водила к КШ и к СШ, то уравнение баланса мощности

$$M_2 \omega_2 = M_3 \omega_3 + M_1 \omega_1. \quad (26)$$

После подстановки в (26)  $M_1$  и  $M_3$  из выражений (24) и (25), а также учёта (23) получим

$$M_2 \omega_2 = \dot{I}_2 \left( \frac{z_3}{z_1+z_3} \omega_3 + \frac{z_1}{z_1+z_3} \omega_1 \right) = M_2 \omega_2.$$

Баланс мощности сошёлся.

Баланс моментов сил, приложенных к СШ, водилу и к КШ также выполняется:

$$M_1 + M_3 = \frac{z_1}{z_1+z_3} M_2 + \frac{z_3}{z_1+z_3} M_2 = M_2.$$

Если в качестве выходного звена ПР рассматривать СШ, то выражение (6) принимает вид:

$$\omega_1 = \frac{z_1+z_3}{z_1} \omega_2 - \frac{z_3}{z_1} \omega_3, \quad (27)$$

Рассмотрим, как будет распределяться момент сил, приложенный к СШ, между водилом и КШ. Из рис.1 следует, что при положительном моменте сил  $M_1$ , приложенных к СШ, к водилу прикладывается положительный момент силы  $M_2$ , а к КШ – отрицательный момент силы  $M_3$ . Поэтому после проведения выкладок, аналогичных (9)-(19),

$$\dot{I}_2 = \frac{z_1+z_3}{z_1} \dot{I}_1, \quad (28)$$

$$M_3 = -\frac{z_3}{z_1} \dot{I}_1. \quad (29)$$

Если рассматривать передачу энергии от СШ к водилу и к КШ, то уравнение баланса мощности будет иметь вид:

$$M_1 \omega_1 = M_2 \omega_2 + M_3 \omega_3. \quad (30)$$

После подстановки в (30)  $M_2$  и  $M_3$  из выражений (28) и (29), а также с учётом (27) получим

$$M_1 \omega_1 = \dot{I}_1 \left( \frac{z_1+z_3}{z_3} \omega_2 - \frac{z_3}{z_1} \omega_3 \right) = M_1 \omega_1.$$

Таким образом, баланс мощности сошёлся.

Баланс моментов сил, приложенных к СШ, водилу и к КШ также выполняется:

$$M_2 + M_3 = \frac{z_1+z_3}{z_1} M_1 - \frac{z_3}{z_1} M_1 = M_1.$$

Из выражений (17), (19), (24), (25), (28) и (29) следует, что между моментами сил, которые приложены к СШ, водилу и к КШ, имеют место следующие соотношения:

$$\dot{I}_1 = -\frac{z_1}{z_3} M_3, \quad (31)$$

$$\dot{I}_2 = \frac{z_1+z_3}{z_1} \dot{I}_1, \quad (32)$$

$$M_3 = \frac{z_3}{z_1+z_3} \dot{I}_2. \quad (33)$$

## Выводы

1. Поскольку ПР обладает свойством обратимости, а именно, свойством передавать механическую энергию в любом направлении, то в общем случае можно рассматривать ПР как динамическое пропорциональное звено с двумя входами и одним выходом или с одним входом и двумя выходами.

2. Для ПР имеет место только одно уравнение связи угловых скоростей с тремя неизвестными величинами  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$  (6). В этом случае представление ПР динамическим пропорциональным звеном с одним входом и двумя выходами не имеет смысла, поскольку задавая значение одной из угловых скоростей, получаем одно уравнение с двумя неизвестными величинами, которое имеет бесконечно большое количество решений. Решение уравнений (6), (23) или (27) получается однозначным при известных значениях двух скоростей. Поэтому при рассмотрении процесса преобразования угловых

скоростей ПР необходимо представлять динамическим пропорциональным звеном с двумя входами и одним выходом. Таким образом, ПР является сумматором угловых скоростей с соответствующими весовыми коэффициентами, значение которых зависит от количества зубьев, расположенных на СШ и на КШ.

3. Процесс преобразования моментов силы в ПР описывается двумя уравнениями связи (17), (19) или (24), (25), или (28), (29) с тремя неизвестными величинами  $M_1$ ,  $M_2$  и  $M_3$ . При этом значения двух неизвестных величин всегда можно представить функциями третьей неизвестной величины. Поэтому в качестве преобразователя моментов силы ПР необходимо представлять динамическим пропорциональным звеном с одним входом и с двумя выходами. Таким образом, ПР распределяет момент силы, поступающий на его вход между двумя выходами с соответствующими весовыми коэффициентами, значение которых зависит от количества зубьев, расположенных на СШ и КШ.

4. Из (31)–(33) следует, что соотношение значений  $M_1$ ,  $M_2$  и  $M_3$  не зависит от того, к какому звену ПР прикладывается движущий или тормозной момент и изменение или ограничение момента на любом из звеньев ПР приводит к изменению или к ограничению моментов на других звеньях ПР.

5. Поскольку соотношение значений моментов сил, приложенных к основным звеньям ПР, является постоянным, а значения угловых скоростей алгебраически суммируются, то можно рассматривать ПР, как сумматор мощности механической энергии, подводимой к двум его основным звеньям и снимаемой с третьего звена или распределителем мощности механической энергии, подводимой к одному звену и снимаемой с двух звеньев. При регулировании скорости соотношение значений мощности механической энергии, подводимой или снимаемой с его основных звеньев, не остаётся постоянным.

## Список использованной литературы

1. Артоболевский И. И. Механизмы в современной технике: Справочное пособие в 7 томах. Т.4. Зубчатые механизмы. – 2-е изд. Переработанное / И. И. Артоболевский – М.: – Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1980. – 592 с.
2. Иванов М. Л. Детали машин: Учеб. для студентов вузов: под ред. В. А. Финогенова / М. Л. Иванов.– 6-е изд., перераб. – М.: – Высш. шк., 2000. – 383 с.
3. Joseph Edward Shigley. Theory of Machines and Mechanisms / Joseph Edward Shigley, John Joseph Uicker. – ISBN: 0070568847, ISBN-13: 9780070568846. – Publisher: McGraw-Hill, 1980. 648 с.

Получено 02.07.2012

## References

1. Artobolevsky I. I. Mechanisms in a modern technique: Certificate manual. In 7 volumes. V.4. Toothed mechanisms. it is the 2-th publ. переработанное / I. I. Artobolevsky – Moscow:– Science. Main release of fizyko-matematicheskoy literature. 1980 – 592 p. [in Russian].
2. Ivanov M. L. Details of machines: Studies. for the students of Technical university: Under the release V. A. Fynogenova / M. L. Ivanov – 6-th publ. – Moscow: Vyssh. shk., 2000. – 383 p. [in Russian].
3. Joseph Edward Shigley. Theory of Machines and Mechanisms / Joseph Edward Shigley, John Joseph Uicker. – ISBN: 0070568847, ISBN-13: 9780070568846. – Publisher: McGraw-Hill, 1980. 648 p. [in English].



Войтенко  
Владимир Андреевич,  
канд. техн. наук, доц.  
каф. ЭМС КУ Одес-  
ского нац. политехн.  
ун-та,  
тел. 048-7-348-467